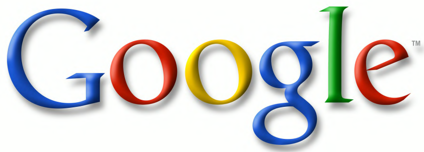
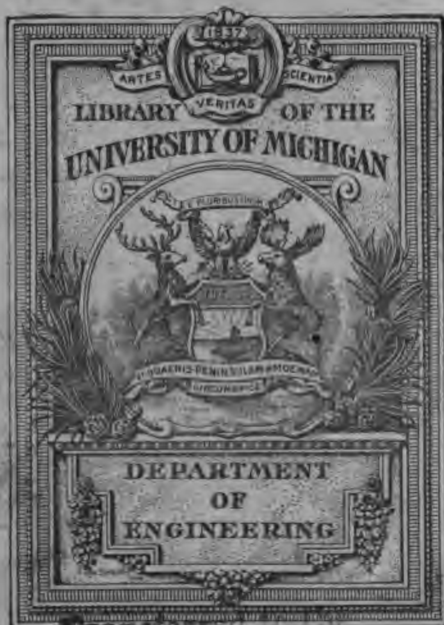
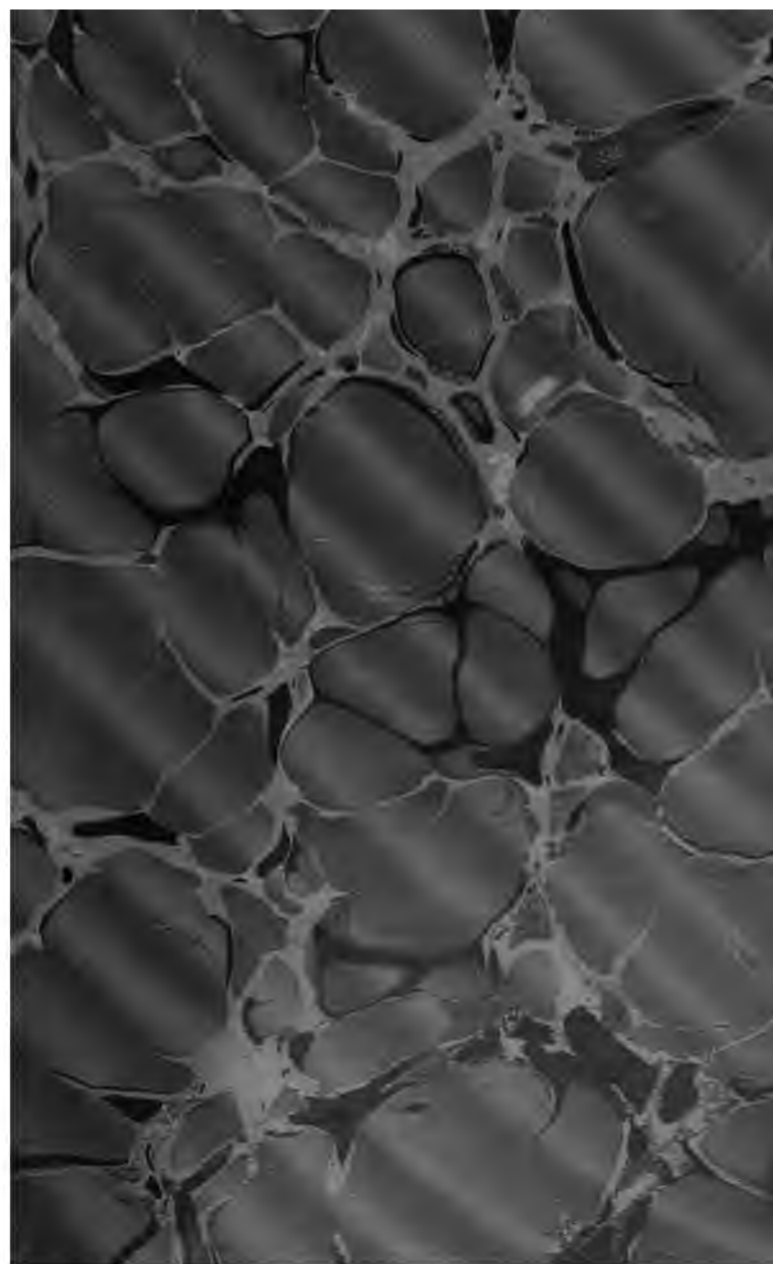



ARTES
VERITAS
SCIENTIA
LIBRARY OF THE
UNIVERSITY OF MICHIGAN
DEPARTMENT
OF
ENGINEERING



LEÇONS

DE

MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE

A L'USAGE DES ÉLÈVES

DES CLASSES DE PREMIÈRE C ET D

Conformément aux programmes du 31 mai 1902;

PAR

P. APPELL, MEMBRE DE L'INSTITUT.

J. CHAPPUIS, PROFESSEUR A L'ÉCOLE CENTRALE.

DEUXIÈME ÉDITION.



PARIS,

GAUTHIER-VILLARS, IMPRIMEUR-LIBRAIRE

DU BUREAU DES LONGITUDES, DE L'ÉCOLE POLYTECHNIQUE

Quai des Grands-Augustins, 55.

1905

PRÉFACE.

On a souvent reproché, dans ces dernières années, à l'Enseignement mathématique secondaire d'être trop abstrait et de négliger les sciences d'expérience et d'observation comme la Mécanique et la Cosmographie qui, en mettant les élèves à même d'appliquer à des problèmes pratiques les connaissances qu'ils acquièrent en Géométrie, en Algèbre, en Trigonométrie, les habituent aux calculs numériques, aux changements d'unité si fréquents dans la Physique et l'Industrie, éveillent en eux l'esprit d'initiative, en un mot les préparent au milieu dans lequel la plus grande partie d'entre eux seront forcément appelés à se développer.

Le nouveau programme du 31 mai 1902 réalise, à ce point de vue, un grand progrès sur le précédent, en étendant l'enseignement de la Cinématique et de la Mécanique, en le rapprochant de l'enseignement

des sciences physiques et en le mettant en harmonie avec les méthodes suivies dans les grandes écoles et dans l'Enseignement supérieur. Ce programme étant ainsi conçu sur un type nouveau, nous avons pensé pouvoir rendre service en nous associant entre mathématicien et physicien, pour fournir aux professeurs et aux élèves les éléments d'un enseignement répondant, dans ses traits généraux, aux conditions que nous venons d'indiquer.

Nous présentons, dans ce petit Volume, le développement du programme commun aux classes de Première (latin-sciences et sciences-langues vivantes) portant sur les notions géométriques et la Cinématique. Le développement du programme de la classe de Mathématiques fait l'objet d'un second Volume. Nous nous sommes attachés scrupuleusement au programme, en évitant la systématisation exagérée, et en choisissant toujours les applications et les exemples les plus familiers aux élèves. Voici quelques détails sur la composition de ce Volume.

La partie géométrique relative aux *vecteurs* a été développée par des méthodes géométriques élémentaires qui offrent l'avantage d'habituer l'élève à raisonner directement sur les objets eux-mêmes, tandis

que l'abus des méthodes de la Géométrie analytique détruit l'intuition et l'esprit d'invention.

Dans les principes de la Cinématique, nous avons fait comprendre, par de nombreux exemples, la *relativité* de la notion de *mouvement*, et nous avons supprimé complètement les mots *mouvement absolu*. Pour la notion de *temps*, nous avons donné quelques développements sur l'égalité, l'addition, la multiplication et la division du temps, sur l'unité de temps et sur le pendule considéré comme instrument de mesure du temps.

L'exposition de la Cinématique du point se trouve simplifiée, grâce à l'heureuse idée qu'on a eue d'introduire franchement la notion de dérivée dans les éléments; il est alors aisé de définir, d'une façon précise, d'abord le *vecteur vitesse*, puis le *vecteur accélération*, considéré, par l'intermédiaire de l'hodographe, comme la vitesse de la vitesse.

Pour les mouvements élémentaires d'un solide (translation, rotation, mouvement hélicoïdal), nous avons donné des définitions et une étude rigoureuses, puis nous en avons indiqué des exemples familiers tirés des objets usuels. Dans l'explication de la réalisation pratique de ces mouvements, nous avons donné des figures représentant des glissières, des arbres et

des coussinets, des pivots et des crapaudines, des vis et des écrous; mais il est évident que le professeur ne devra pas se contenter de figures, ni même de modèles, mais qu'il devra montrer aux élèves comment ces mouvements sont obtenus dans les machines usuelles : voiture, bicyclette, automobile, locomotive, et dans les appareils de Physique.

Enfin, pour le changement du système de comparaison, nous nous sommes limités, comme l'indique le programme, aux trajectoires et aux vitesses, le théorème de Coriolis devant être réservé pour l'Enseignement supérieur; puis nous avons donné des applications tirées de mouvements usuels qui suggéreront de nombreux exercices du même genre.

Nous avons d'ailleurs, à la fin de cette seconde édition, ajouté des énoncés de problèmes, avec quelques indications sur les solutions.

1er mai 1905.

P. APPELL.
J. CHAPPUIS.



LEÇONS

DE

MÉCANIQUE ÉLÉMENTAIRE.

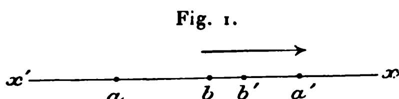
CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS GÉOMÉTRIQUES; VECTEURS; PROJECTIONS; MOMENTS.

I. — SEGMENTS SUR UN AXE OU UNE LIGNE ORIENTÉS.

Axe orienté. — Soit une droite fixe $x'x$ (*fig.* 1). Un mobile qui se déplace sur cette droite peut marcher dans le sens $x'x$ ou dans le sens xx'. Pour distinguer commodément ces deux sens, on appelle l'un d'eux

Fig. 1.

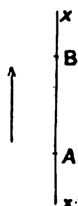


sens positif, l'autre *sens négatif*. Convenons, sur la figure 1, de prendre, comme sens positif, le sens $x'x$ marqué par une flèche; le sens opposé xx'

sera négatif; un mobile allant de a en b marchera dans le sens positif; un mobile allant de a' en b' dans le sens négatif.

Imaginons, par exemple, une droite verticale fixe $x'x$ (*fig.* 2) et choisissons sur cette droite, comme sens positif, le sens de bas en haut marqué par une flèche. Alors une pierre lancée verticalement d'un point A de cette droite vers le haut, marche d'abord dans le sens positif jusqu'à un certain point B, puis retombe en marchant dans le sens négatif.

Fig. 2.



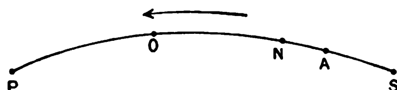
Quand on a ainsi fixé un sens positif sur une droite, cette droite prend le nom d'*axe orienté*.

Dans nos figures, lorsque nous aurons un axe horizontal comme celui de la figure 1, nous prendrons ordinairement, pour sens positif, le sens de gauche à droite; de même sur un axe vertical comme dans la figure 2 nous prendrons, pour sens positif, le sens de bas en haut.

2. Ligne courbe orientée. — On peut employer la même convention pour une ligne courbe quelconque PS (*fig.* 3) et distinguer les deux sens dans lesquels un mobile peut parcourir la courbe par les mots *positif* ou *négatif*. Par exemple, si l'on prend la ligne de chemin de fer de Paris à Strasbourg, on peut regarder comme positif le sens Strasbourg-Paris

(marqué par une flèche) et comme négatif le sens contraire. Alors un train allant de Paris P, à Nancy N,

Fig. 3.



marche dans le sens négatif, et un train allant de Strasbourg S, à Avricourt A, marche dans le sens positif.

3. **Segments portés par un axe orienté.** — Soit (*fig.* 1) un axe orienté $x'x$, sur lequel le sens regardé comme positif est le sens marqué par la flèche. Prenons sur cet axe deux points a et b situés à une distance D l'un de l'autre; D est un nombre qui exprime des centimètres, mètres, kilomètres suivant l'unité de longueur choisie; on appelle alors *segment ab* la valeur numérique de la distance des deux points précédée du signe + ou du signe —, suivant qu'un mobile allant de a vers b marche dans le sens positif ou le sens négatif choisi sur l'axe. Ainsi sur la figure 1 on a

$$\textit{segment } ab = +\mathrm{D};$$

si l'on prend sur la figure 1 les deux points a', b' à la distance D' l'un de l'autre, on a, au contraire,

$$\textit{segment } a'b' = -\mathrm{D}',$$

car pour aller de a' à b' il faut marcher dans le sens négatif. L'avantage de cette convention est que l'on indique en même temps la distance des deux points et leur position relative.

Le point de départ *a* s'appelle l'*origine du segment ab*; le point d'arrivée *b* l'*extrémité du segment;* en écrivant *segment ab* on écrit d'abord l'origine, puis l'extrémité.

4. Segments curvilignes sur une courbe orientée. — La même convention peut être appliquée à une ligne courbe qu'on a orientée, c'est-à-dire sur laquelle on a choisi un sens positif. Ainsi en prenant (*fig.* 3) la ligne de Paris à Strasbourg et en choisissant comme sens positif le sens Strasbourg-Paris on peut dire que le segment curviligne Nancy-Avricourt est -59^{km}, le signe — indiquant que pour aller de Nancy N, à Avricourt A, il faut marcher dans le sens négatif, et le nombre 59 indiquant la distance en kilomètres entre les deux stations. De même le segment curviligne Strasbourg-Nancy est $+150^{km}$.

Notations. — Pour désigner un *segment ab*, soit rectiligne, soit curviligne, on écrit d'abord la lettre *a* marquant le point de départ ou *origine* du segment, puis la lettre *b* marquant le point d'arrivée ou *extrémité* du segment, et l'on surmonte le groupe des deux lettres d'un trait horizontal; le segment *ab* est ainsi

représenté par la notation

$$\overline{ab}.$$

Ainsi, dans les exemples précédents, on écrira, en désignant Nancy, Avricourt, Strasbourg par N, A, S,

$$\overline{\mathrm{NA}} = -59,$$
$$\overline{\mathrm{SN}} = +150.$$

Il est évident, d'après ces conventions, que les segments $\overline{ab}$ et $\overline{ba}$ sont égaux et de signes contraires, car la distance de a à b est égale à celle de b à a, mais pour aller de a à b il faut marcher en sens contraire du sens nécessaire pour aller de b à a. On a donc

$$\overline{ab} = -\overline{ba}.$$

Ainsi, dans la figure 3,

$$\overline{\mathrm{NA}} = -59, \qquad \overline{\mathrm{AN}} = +59,$$
$$\overline{\mathrm{NA}} = -\overline{\mathrm{AN}},$$

5. Théorème des segments. — Nous venons de voir que si l'on prend, sur un axe orienté, des points a et b on a

$$\overline{ab} = -\overline{ba},$$

et par suite

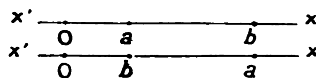
$$\overline{ab} + \overline{ba} = 0.$$

D'une façon générale : *Lorsqu'on place, sur un*

axe orienté $x'x$, n points a, b, c, ..., h, k, l, la somme des n segments consécutifs ab, bc, ..., hk, kl, la, déterminés sur cette droite par les points considérés, est toujours nulle, quel que soit l'ordre dans lequel ces points sont placés.

Pour le démontrer, nous emploierons un point auxiliaire o placé sur la droite $x'x$ à gauche de tous les points a, b, c, d, ..., k, l (*fig.* 4).

Fig. 4.



Considérons d'abord, sur la droite $x'x$, les trois points o, a, b; deux cas peuvent se présenter suivant que le point b est à droite ou à gauche de a.

Supposons, en premier lieu, que le point b soit à droite de a. Nous aurons

$$\overline{oa} + \overline{ab} = \overline{ob}. \tag{1}$$

Si nous supposons maintenant le point b à gauche de a, nous aurons

$$\overline{ob} + \overline{ba} = \overline{oa},$$

d'où

$$\overline{oa} - \overline{ba} = \overline{ob}$$

ou

$$\overline{oa} + \overline{ab} = \overline{ob}.$$

La relation (1) existe donc dans les deux cas. Nous

pourrons donc écrire la suite d'égalités

$$\overline{oa} + \overline{ab} = \overline{ob},$$
$$\overline{ob} + \overline{bc} = \overline{oc},$$
$$\overline{oc} + \overline{cd} = \overline{od},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$
$$\overline{ok} + \overline{kl} = \overline{ol},$$
$$\overline{ol} + \overline{la} = \overline{oa}.$$

Si nous les ajoutons membre à membre, nous aurons, en faisant disparaître les termes communs aux deux membres,

$$(2) \qquad \overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \ldots + \overline{kl} + \overline{la} = 0,$$

relation qui démontre la propriété énoncée.

Cette équation (2) que nous venons d'établir rigoureusement pourrait être rendue évidente par le raisonnement suivant. Imaginons un promeneur qui parcourt l'axe orienté en partant de a, allant d'abord de a en b, puis de b en c, puis de c en d, ..., de k en l et revenant enfin de l en a; il est évident que la somme des distances parcourues dans un sens est égale à la somme des distances parcourues dans l'autre, ou encore que la *somme algébrique* des *segments* parcourus est *nulle :* c'est ce fait qu'exprime l'équation.

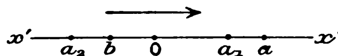
La même relation (2) est vraie pour des segments curvilignes sur une courbe orientée. Ainsi il est évi-

dent (*fig.* 3) que

$$\overline{\text{PN}} + \overline{\text{NS}} + \overline{\text{SP}} = 0.$$

6. Abscisse d'un point sur un axe orienté. — Avec les conventions précédentes, on peut définir la position d'un point sur une droite par un nombre positif ou négatif, de telle façon qu'à chaque point de la droite réponde un seul nombre et à chaque nombre un seul point. Pour cela on commence par faire choix d'un sens positif sur la droite, le sens $x'x$ de gauche à droite par exemple (*fig.* 5); puis on marque sur la droite un point fixe quelconque O appelé *origine des abscisses*. Alors, pour définir la position d'un point a sur la droite, il suffit d'indiquer la valeur algébrique x du segment $\overline{Oa}$ ayant le point O pour origine et le point a pour extrémité. Cette valeur algébrique

Fig. 5.



$$x = \overline{Oa}$$

s'appelle *abscisse* du point a.

Chaque point a possède donc une abscisse bien déterminée. Inversement à chaque abscisse correspond un seul point : pour figurer le point a dont l'abscisse x est donnée, on portera à partir du point O une longueur égale à la valeur absolue de x

vers la droite ou vers la gauche suivant que x est positif ou négatif.

Ainsi le point a_1, dont l'abscisse est $x_1 = 11^{mm}$, est sur la droite Ox à une distance de 11^{mm} comptée à partir du point O vers la droite, tandis que le point a_2, dont l'abscisse est $x_2 = -15^{mm}$, est à une distance de 15^{mm} comptée à partir de l'origine vers la gauche.

Expression analytique d'un segment. — Soient des points a, b, ... sur un axe orienté. Prenons une origine O sur l'axe et soient x et x' les abscisses des extrémités a et b d'un segment $\overline{ab}$; on a (*fig.* 5)

$$\overline{ab} = x' - x;$$

en effet, d'après la définition même des abscisses, les segments $\overline{Oa}$ et $\overline{Ob}$ sont égaux à x et x'; dès lors, en appliquant la relation générale (2) ci-dessus aux trois points O, a, b, on a

$$\overline{ab} + \overline{bO} + \overline{Oa} = 0, \qquad \overline{ab} = \overline{Ob} - \overline{Oa},$$

c'est-à-dire

$$\overline{ab} = x' - x.$$

On a, par exemple, en millimètres,

$$\overline{a_1 a_2} = -15 - 11 = -26.$$

En partant de cette expression analytique d'un segment, on vérifie immédiatement que la relation (2) est une identité.

7. Position d'un point sur une courbe orientée. — En prenant une courbe orientée (*fig.* 3) et sur cette courbe un point fixe O comme origine des arcs, on peut de même définir la position d'un point quelconque M sur la courbe par la valeur algébrique s du segment curviligne OM

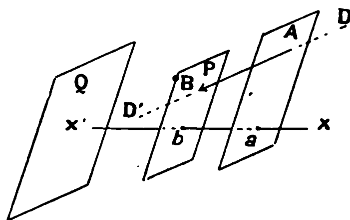
$$s = \overline{OM}.$$

C'est ce qu'on fait, par exemple, en Trigonométrie pour définir l'extrémité d'un arc sur le cercle trigonométrique.

II. — VECTEURS; PROJECTIONS ET MOMENTS.

8. Vecteurs. — On appelle *vecteur* une portion de droite AB, placée dans l'espace, ayant une *origine* ou *point d'application* A et une *extrémité* B. Dans le langage et dans l'écriture, on place en premier l'*origine* A et en second l'*extrémité* B. Dans les figures (*fig.* 6), on met ordinairement une flèche à l'extrémité. Un vecteur est donc défini complètement par son origine et son extrémité.

Fig. 6.



On peut également définir un vecteur par les quatre éléments suivants :

1° Son *origine* ou *point d'application* A;

2° Sa *direction,* c'est-à-dire la droite indéfinie D'D qui le porte;

3° Son *sens,* c'est-à-dire le sens dans lequel un mobile partant de A et suivant le vecteur décrit la droite D'D;

4° Sa *grandeur,* c'est-à-dire la longueur AB mesurée avec une certaine unité.

La grandeur P d'un vecteur est un certain nombre positif : quelquefois, dans une figure, on désigne un vecteur par la seule lettre P placée à l'extrémité; ou encore, dans l'écriture, on désigne le vecteur en mettant la grandeur P entre parenthèses et l'on dit le vecteur (P); mais c'est là une façon sommaire de désigner un vecteur et qu'on peut seulement employer quand il n'y a aucun doute sur son point d'application, sa direction et son sens.

9. Projection d'un point sur un axe parallèlement à un plan donné. — Étant donné un axe $x'x$ et un plan Q *non parallèle à l'axe,* on appelle *projection* d'un point A sur l'axe le point a d'intersection de l'axe avec le plan mené par A parallèlement au plan Q (*fig.* 6).

Projection d'un vecteur sur un axe orienté. — Soit

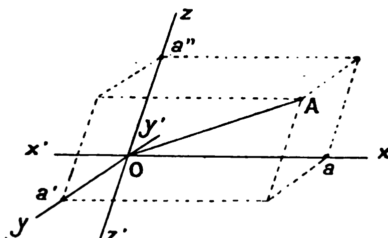
un vecteur AB dans l'espace. Considérons un axe orienté $x'x$ et un plan Q non parallèle à l'axe. On peut projeter le vecteur sur l'axe parallèlement au plan Q : pour cela, on projette les points A et B sur l'axe en menant par ces points des plans parallèles au plan Q; ces plans coupent l'axe aux points a et b; le segment $\overline{ab}$ *pris avec son signe,* sur l'axe orienté $x'x$, s'appelle *projection du vecteur sur* $x'x$. Cette projection $X = \overline{ab}$ est donc un nombre positif ou négatif, suivant le sens du segment $\overline{ab}$; ainsi, sur la figure 6, le sens positif de l'axe étant $x'x$, la projection de AB est négative. La projection X peut être exceptionnellement nulle, si les points a et b coïncident : pour cela, il faut et il suffit ou bien que le vecteur AB soit lui-même nul (A confondu avec B), ou bien que le vecteur AB soit parallèle au plan Q.

Si le plan Q est perpendiculaire à l'axe $x'x$, la projection est dite *orthogonale.*

10. Projections d'un point sur trois axes formant un trièdre. — Soient trois axes Ox, Oy, Oz formant un trièdre. Pour projeter un point A de l'espace sur ces trois axes (*fig.* 7), on projette le point sur chacun des trois axes parallèlement au plan des deux autres. Ainsi, on mène par A un plan parallèle au plan yOz; ce plan coupe l'axe Ox en un point a qui est la projection de A sur Ox. De même, on mène par A un plan parallèle au plan zOx et l'on obtient le

point a', projection de A sur Oy; enfin, on mène par A un plan parallèle au plan xOy, et en prenant son intersection avec Oz on obtient le point a'', projection

Fig. 7.



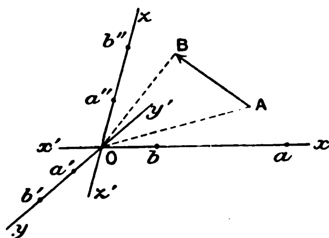
de A sur Oz. Les trois plans que nous venons de mener forment, avec les plans yOz, zOx et xOy, un parallélépipède que nous avons figuré (*fig.* 7), dans lequel les points O et A sont aux deux extrémités d'une diagonale.

Si l'on donne les trois projections a, a', a'' d'un point A, on peut retrouver facilement le point : il suffit de construire le parallélépipède ayant pour arêtes Oa, Oa', Oa'' : le point cherché est le sommet de ce parallélépipède opposé à O.

Projections d'un vecteur sur trois axes orientés formant un trièdre. — Soient trois axes $x'Ox$, $y'Oy$, $z'Oz$ partant d'un même point O et formant dans l'espace un trièdre (*fig.* 8) : supposons ces axes orientés

dans les sens respectifs $x'x$, $y'y$, $z'z$. Soit, d'autre part, AB un vecteur. On peut projeter ce vecteur sur chacun des trois axes *parallèlement au plan des deux autres*. Pour cela, on construira, comme nous venons de le voir, les projections a, a', a'' de l'origine A, et les projections b, b', b'' de l'extrémité. Le segment (*fig.* 8)

Fig. 8.



$$X = \overline{ab},$$

pris avec son signe, sera la projection du vecteur sur Ox.

De même, les segments

$$Y = \overline{a'b'}, \qquad Z = \overline{a''b''}$$

seront ses projections sur Oy et Oz. Dans la figure 8, X est négatif, Y et Z positifs.

Un vecteur donné AB a ainsi, sur les axes Ox, Oy, Oz, trois projections qui sont des nombres positifs, négatifs ou nuls.

Si le vecteur a une longueur nulle, il est évident que ses trois projections sont nulles.

Réciproquement, *si les trois projections d'un vecteur sont nulles, ce vecteur est lui-même nul.*

En effet, si X est nul, le vecteur est, ou bien nul, ou bien parallèle au plan yOz; si Y est nul, le vecteur est, ou bien nul, ou bien parallèle au plan zOx; enfin, si Z est nul le vecteur est, ou bien nul, ou bien parallèle au plan xOy; si donc X, Y, Z sont nuls à la fois, le vecteur est *nul,* car il ne peut pas être parallèle à la fois aux trois faces du trièdre $Oxyz$.

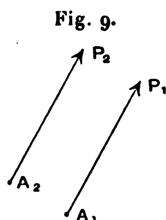
Remarque. — *Un vecteur est entièrement déterminé quand on connaît le point d'application et les trois projections du vecteur.* En effet, supposons qu'on connaisse le point d'application A et les trois projections X, Y, Z d'un vecteur; on peut d'abord construire (*fig.* 8) les points a, a', a'', projections du point A sur les trois axes; on peut ensuite placer sur ces axes les trois segments $\overline{ab}$, $\overline{a'b'}$, $\overline{a''b''}$ respectivement égaux à X, Y, Z; les points b, b', b'' sont alors connus et le point B se trouve à l'intersection du plan mené par b parallèlement à yOz, du plan mené par b' parallèlement à zOx, et du plan mené par b'' parallèlement à xOy. Il est donc connu.

11. Quelques définitions. — *Deux vecteurs sont identiques* quand ils ont même origine, même direction, même sens et même longueur, c'est-à-dire quand ils se confondent.

Deux vecteurs sont égaux ou équipollents quand ils ont même direction (*fig.* 9), même sens et même

longueur, mais sans avoir nécessairement même point d'application. D'après cela, pour que deux vecteurs P_1 et P_2 de projections respectives X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 soient égaux, il faut et il suffit que l'on ait

Fig. 9.



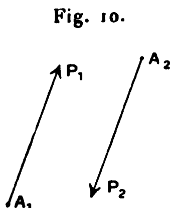
$$(3)\quad X_1 = X_2, \qquad Y_1 = Y_2, \qquad Z_1 = Z_2.$$

Nous désignerons l'égalité géométrique de deux vecteurs P_1 et P_2 par la relation

$$(P_1) = (P_2),$$

en mettant les vecteurs entre parenthèses : cette relation unique est donc équivalente à l'ensemble des équations (3).

Fig. 10.



Deux vecteurs sont égaux et opposés quand ils sont parallèles, de même longueur (*fig.* 10), *mais de sens contraires;* ils forment alors ce qu'on appelle un *couple de vecteurs*. Ce fait est exprimé par les relations suivantes entre les projections des deux vecteurs P_1 et P_2

$$X_1 = -X_2, \qquad Y_1 = -Y_2, \qquad Z_1 = -Z_2;$$

nous l'exprimerons, pour abréger, par la notation

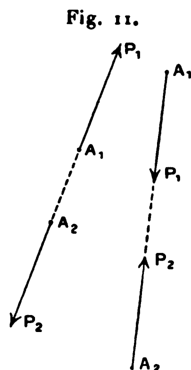
$$(P_1) = -(P_2).$$

Deux vecteurs sont égaux et directement op-

posés quand ils sont égaux, opposés et dirigés suivant la même droite indéfinie (*fig.* 11).

12. Théorème des projections. — L'étude de la composition des vecteurs nécessite l'emploi du théorème des projections, dont on fait un fréquent usage sous l'une quelconque des trois formes suivantes :

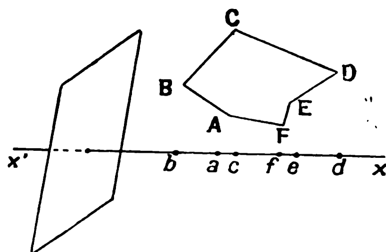
Fig. 11.



Théorème I. — *La somme algébrique des projections des vecteurs formant les éléments d'un contour polygonal fermé, plan ou gauche, est nulle.*

Soit le contour polygonal fermé ABCDEFA (*fig.* 12). Projetons sur l'axe $x'x$ ses dif-

Fig. 12.



férents sommets; soient a, b, c, d, e, f ces projections.

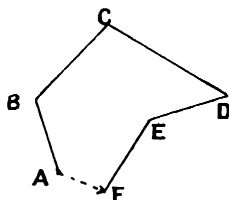
Nous imaginons que la ligne polygonale est décrite par un point mobile partant de A et rencontrant les différents sommets dans l'ordre ABCDEFA, et nous regardons chaque côté comme un vecteur ayant pour sens le sens dans lequel il est décrit.

Considérons maintenant, sur l'axe $x'x$, les segments déterminés par les points a, b, c, d, e, f; on a, d'après le théorème général relatif aux segments,

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ef} + \overline{fa} = 0,$$

mais les segments ab, bc, ..., fa sont en grandeurs et en signes les projections des vecteurs AB, BC, ..., FA, éléments du contour. La propriété est donc démontrée.

Fig. 13.



Théorème II. — *La somme algébrique des projections des éléments d'un contour polygonal, non fermé, plan ou gauche, est égale à la projection de la résultante.*

Considérons le contour polygonal non fermé ABCDEF (*fig.* 13). Nous imaginons, comme précédemment, le contour polygonal décrit par un point mobile partant de A et rencontrant, par suite, les som-

mets dans l'ordre ABCDEF. On dit alors que A est l'*origine du contour* et F son *extrémité*. Si l'on mène la droite AF qui joint l'origine A à l'extrémité F, on dit que ce vecteur qui ferme le contour est la *résultante* des éléments du contour; A est son origine, F son extrémité.

Si nous considérons le contour polygonal fermé ABCDEFA, nous avons, d'après le théorème précédent,

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ef} + \overline{fa} = 0,$$

d'où nous tirons

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ef} = -\overline{fa},$$

mais

$$-\overline{fa} = \overline{af}.$$

par suite,

$$\overline{ab} + \overline{bc} + \overline{cd} + \overline{de} + \overline{ef} = \overline{af};$$

la proposition est donc démontrée.

Théorème III. — *Lorsque deux contours polygonaux non fermés ont même origine et même extrémité, c'est-à-dire ont la même résultante, les sommes algébriques des projections des éléments des deux contours sont égales.*

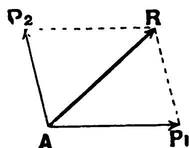
C'est une conséquence immédiate de la proposition précédente, puisque ces sommes sont toutes deux

égales à la projection du vecteur qui ferme les deux contours.

13. Somme géométrique ou composition des vecteurs ayant même origine. — Dans ce qui suit, nous considérons des vecteurs ayant même origine.

Deux vecteurs. — Soient d'abord deux vecteurs AP_1 et AP_2 d'origine commune A; par l'extrémité P_1 de l'un des vecteurs menons un vecteur P_1R (*fig.* 14), égal géométriquement à l'autre AP_2. Le vecteur AR d'origine A et d'extrémité R est la *somme géométrique* ou *résultante* des deux vecteurs donnés. On écrit

Fig. 14.



$$(R) = (P_1) + (P_2),$$

les parenthèses indiquant qu'il s'agit d'une égalité géométrique.

La somme des deux vecteurs P_1 et P_2 est évidemment indépendante de l'ordre dans lequel on prend les deux vecteurs; si par l'extrémité P_2 du deuxième on menait un vecteur P_2R égal géométriquement au premier P_1, on aboutirait évidemment au même point R, car la figure AP_1RP_2 est un parallélogramme; on peut donc écrire aussi

$$(R) = (P_2) + (P_1).$$

La grandeur R du vecteur résultant se calcule immédiatement dans le triangle AP_1R; appelons $\widehat{P_1P_2}$ l'angle des deux vecteurs composants P_1AP_2; l'angle AP_1R est le supplément de cet angle; on a donc

$$R^2 = P_1^2 + P_2^2 + 2P_1P_2 \cos\widehat{P_1P_2}.$$

Détermination analytique de la résultante de deux vecteurs. — Prenons trois axes quelconques et appelons X_1, Y_1, Z_1 et X_2, Y_2, Z_2 les projections des deux vecteurs AP_1 et AP_2, X, Y, Z celles du vecteur résultant AR.

D'après le théorème des projections, si l'on considère le contour polygonal AP_1R et le vecteur AR ayant même origine et même extrémité, la projection de AR sur un axe est égale à la somme des projections des côtés AP_1 et P_1R du contour; en projetant successivement sur les trois axes on a ainsi les trois équations

$$X = X_1 + X_2, \qquad Y = Y_1 + Y_2, \qquad Z = Z_1 + Z_2$$

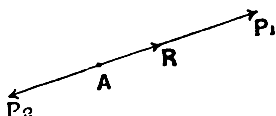
qui définissent la résultante.

Examinons quelques cas particuliers. Il peut arriver que l'angle des vecteurs P_1 et P_2 soit nul : alors les deux vecteurs composants ont même direction et même sens; le vecteur résultant a également la même direction et le même sens, et sa grandeur est égale à la somme des grandeurs des vecteurs composants.

Il peut arriver que l'angle des deux vecteurs donnés

soit de 180°; ces deux vecteurs ont alors des sens opposés (*fig.* 15). Le vecteur résultant AR a le sens du plus grand des deux et pour longueur la différence des deux longueurs.

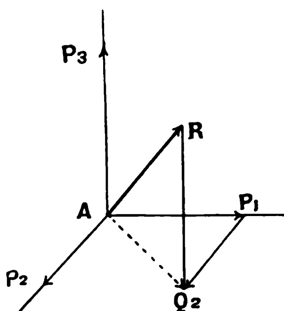
Fig. 15.



Il peut arriver enfin que les vecteurs P_1 et P_2 soient égaux et opposés; alors leur somme est nulle : le point R coïncide avec le point A.

Trois vecteurs. — Soient trois vecteurs P_1, P_2, P_3 d'origine commune A. Par l'extrémité P_1 du premier vecteur menons un vecteur P_1Q_2 égal au deuxième P_2, puis par le point Q_2 un vecteur Q_2R égal au troisième P_3 (*fig.* 16). Le vecteur AR, d'origine A et d'extrémité R, est la somme géométrique des trois vecteurs donnés. Ce vecteur est indépendant de l'ordre dans lequel on prend les trois vecteurs donnés, car le point R est le sommet opposé au point A dans le parallélépipède construit sur AP_1, AP_2, AP_3.

Fig. 16.



Pour exprimer que R est la résultante de P_1, P_2, P_3, on écrit l'égalité géométrique

$$(R) = (P_1) + (P_2) + (P_3).$$

On peut remarquer que, pour obtenir R, on peut faire d'abord la somme de deux des vecteurs, puis composer cette somme avec le troisième. Par exemple, dans la figure 16, le vecteur AQ_2 représente la somme géométrique de P_1 et P_2 et AR est la résultante de cette somme et de P_3.

Analytiquement, appelons X_1, Y_1, Z_1; X_2, Y_2, Z_2; X_3, Y_3, Z_3 les projections des vecteurs composants, P_1, P_2, P_3 et X, Y, Z celles du vecteur résultant R. Le vecteur AR fermant le contour polygonal AP_1Q_2R, sa projection sur un axe quelconque est égale à la somme des projections des côtés du contour sur le même axe. On a donc

$$\begin{aligned} X &= X_1 + X_2 + X_3, \\ Y &= Y_1 + Y_2 + Y_3, \\ Z &= Z_1 + Z_2 + Z_3. \end{aligned}$$

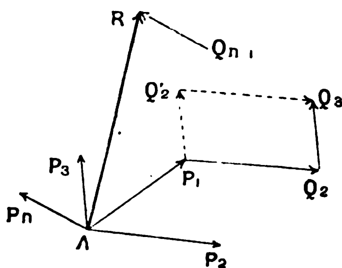
Il peut arriver que la somme géométrique soit nulle; cela aura lieu si le point R coïncide avec A; alors X, Y, Z seront nuls.

Cas général. — Soient n vecteurs P_1, P_2, ..., P_n d'origine commune A. Par l'extrémité P_1 du premier menons un vecteur P_1Q_2 (*fig.* 17) égal au deuxième P_2, par Q_2 un vecteur Q_2Q_3 égal au troi-

sième P_3, ..., et ainsi de suite, par Q_{n-1} un vecteur $Q_{n-1}R$ égal au dernier P_n. La droite AR est la *somme géométrique* ou *résultante des vecteurs donnés.*

Cette somme est indépendante de l'ordre dans lequel on prend les vecteurs composants pour les porter bout à bout. Cela résulte de ce que l'on peut intervertir l'ordre de deux vecteurs composants consécutifs sans en altérer la somme : en effet, si l'on intervertissait P_2 et P_3, on aurait à mener par P_1 un vecteur $P_1Q'_2$ égal à P_3, puis par Q'_2 un vecteur Q'_2Q_3 égal à P_2 ; on arriverait ainsi au même point Q_3, car la figure $P_1Q_2Q_3Q'_2$ est un parallélogramme. Puisqu'on peut intervertir deux vecteurs consécutifs, on peut les ranger dans un ordre quelconque sans changer leur somme géométrique. Ce fait résulte d'ailleurs immédiatement de la détermination analytique de la résultante.

Fig. 17.



Si l'on appelle X_1, Y_1, Z_1 ; X_2, Y_2, Z_2 ; ...; X_n, Y_n, Z_n les projections des composantes, X, Y, Z celles de la résultante, le théorème des projections

donne

$$X = X_1 + X_2 + \ldots + X_n,$$
$$Y = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_n,$$
$$Z = Z_1 + Z_2 + \ldots + Z_n.$$

Ces valeurs X, Y, Z sont évidemment indépendantes de l'ordre dans lequel on prend les composantes.

On voit aussi que, pour faire la somme géométrique de vecteurs de même origine, on peut les partager en groupes d'une façon quelconque, faire la somme des vecteurs de chaque groupe, puis la somme de ces sommes.

Pour exprimer que R est la somme géométrique de P_1, P_2, ..., P_n nous écrirons, en mettant des parenthèses,

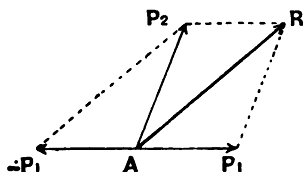
$$(R) = (P_1) + (P_2) + \ldots + (P_n).$$

14. Différence géométrique; décomposition d'un vecteur en vecteurs de même origine. — Dans certains cas on décompose un vecteur donné en vecteurs de même origine, c'est-à-dire qu'on détermine des vecteurs dont le vecteur donné est la résultante. Ce problème n'est pas déterminé sous cette forme générale, pas plus que ne le serait en Arithmétique le problème de décomposer une somme en parties; nous allons en examiner quelques cas particuliers.

1° **Décomposer un vecteur R en deux composantes, connaissant l'une de ses composantes.** — Soit AR un

vecteur (*fig.* 18), AP_1 une de ses composantes; l'autre composante AP_2 sera égale au vecteur P_1R. Ce vecteur P_2 qui, ajouté géométriquement à P_1, donne le vecteur R, s'appelle la *différence géométrique* de R et P_1 et l'on écrit

Fig. 18.



$$(P_2) = (R) - (P_1);$$

cette relation peut alors être considérée comme une conséquence de la relation

$$(R) = (P_1) + (P_2).$$

On peut construire aussi P_2 en remarquant que P_2 est la résultante de R et d'un vecteur $(-P_1)$ égal et opposé à P_1.

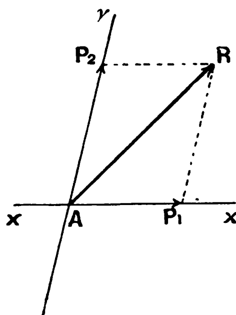
Si l'on prend trois axes, Ox, Oy, Oz, et si l'on appelle X, Y, Z les projections du vecteur R, X_1, Y_1, Z_1 celles du vecteur P_1, le vecteur P_2, *différence géométrique* de R et P_1, a pour projections les différences des projections de ces vecteurs

$$X_2 = X - X_1, \qquad Y_2 = Y - Y_1, \qquad Z_2 = Z - Z.$$

2° **Décomposition d'un vecteur suivant deux directions.** — Soit un vecteur AR et deux directions différentes Ax et Ay (*fig.* 19) *qui sont dans un même plan avec* AR. On peut toujours, et d'une seule façon, décomposer AR suivant ces deux directions :

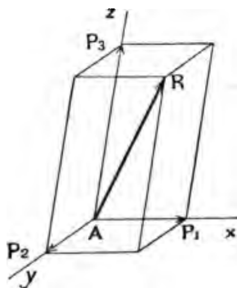
pour cela il suffit de mener par R des parallèles aux deux directions données et de prendre les points P_1, P_2 où ces parallèles coupent les droites indéfinies Ax et Ay; les deux vecteurs AP_1 et AP_2 répondent à la question.

Fig. 19.



3° **Décomposition d'un vecteur suivant trois directions données.** — Soient trois directions Ax, Ay et Az, formant un trièdre (*fig.* 20); on peut toujours décomposer un vecteur AR en trois autres dirigés suivant ces trois directions; pour cela on mène par R des plans parallèles respectivement aux trois plans yAz, zAx, xAy; ces trois plans coupent les droites indéfinies Ax, Ay, Az en trois points P_1, P_2, P_3; les trois vecteurs AP_1, AP_2, AP_3 répondent à la question.

Fig. 20.



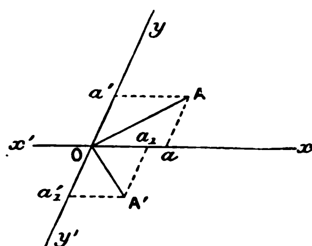
15. Application; coordonnées d'un point. — Nous avons vu qu'on peut

définir la position d'un point sur une droite à l'aide d'un nombre positif ou négatif appelé *abscisse* du point.

On peut de même définir la position d'un point dans un plan au moyen de deux nombres, l'*abscisse* et l'*ordonnée*, et dans l'espace, au moyen de trois nombres, l'*abscisse*, l'*ordonnée* et la *cote;* ces nombres s'appellent les *coordonnées* du point. Leur définition est une application immédiate des considérations précédentes.

Point dans un plan. — Traçons dans le plan deux axes orientés $x'x$, $y'y$, non parallèles, qu'on appelle *axes de coordonnées* (*fig.* 21); soit O leur point d'intersection appelé *origine des coordonnées*. Pour définir la position d'un point A dans le plan, il suffit de définir le vecteur OA allant du point O au point A. Or ce vecteur est, d'après ce qui précède, défini par ses deux segments projections Oa et Oa' sur Ox et Oy,

Fig. 21.



$$x = \overline{Oa}, \qquad y = \overline{Oa'},$$

la projection sur chaque axe étant faite parallèlement à l'autre. Les nombres x et y s'appellent, le premier

l'*abscisse*, le second l'*ordonnée* du point A. D'après cela, à un point donné répond un seul système de coordonnées x et y; inversement, à un système de valeurs de x et y répond un seul point A qu'on obtient en construisant sur Ox et Oy les segments

$$\overline{Oa} = x, \qquad \overline{Oa'} = y,$$

et prenant la somme géométrique des vecteurs Oa et Oa'.

Comme exemple, le point A′ (*fig.* 21), dont les coordonnées, en millimètres, sont $x_1 = 11^{mm}$ et $y_1 = -15^{mm}$, s'obtiendra en portant sur Ox, à droite de O, une longueur $Oa_1 = 11^{mm}$ et sur Oy, au-dessous de O, une longueur $Oa'_1 = 15^{mm}$, et menant par les points a_1 et a'_1 ainsi déterminés des parallèles aux axes de coordonnées qui se coupent en A′.

Point dans l'espace. — Soient, comme dans la

Fig. 22.

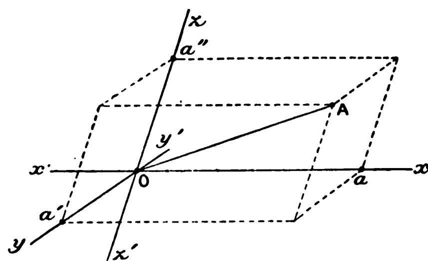


figure 22, trois axes orientés $x'x$, $y'y$, $z'z$ formant

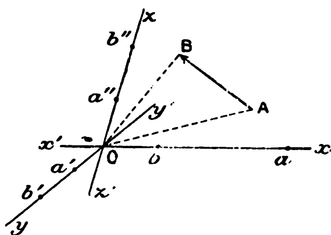
les arêtes d'un trièdre de sommet O. Ces axes sont les axes de coordonnées; O est l'origine des coordonnées.

Pour définir la position d'un point A de l'espace, il suffit de définir le vecteur OA allant du point O au point A. Or ce vecteur est défini par les valeurs algébriques x, y, z des trois segments projections $\overline{Oa}$, $\overline{Oa'}$, $\overline{Oa''}$ (*fig.* 22) :

$$x = \overline{Oa}, \qquad y = \overline{Oa'}, \qquad z = \overline{Oa''}.$$

Ces nombres x, y, z sont les coordonnées du point; le premier est l'*abscisse*, le deuxième l'*ordonnée*, le troisième la *cote*. On voit que chaque point A de l'espace a pour coordonnées un système unique de trois nombres x, y, z; inversement, à tout système de trois nombres x, y, z répond un seul point A qu'on obtient en prenant sur les trois axes les segments $\overline{Oa}$, $\overline{Oa'}$, $\overline{Oa''}$ égaux à x, y, z et construisant l'extrémité A de la somme géométrique des vecteurs Oa, Oa', Oa''.

Fig. 23.



Exercice. — Soit dans l'espace un vecteur AB dont l'origine A a pour coordonnées x, y, z par rapport à trois axes Ox, Oy, Oz (*fig.* 23) et dont l'extrémité B

a pour coordonnées x', y', z'. On demande de calculer les projections X, Y, Z du vecteur sur les axes.

On peut remarquer que les points a et b, projections de A et B sur Ox, ont pour abscisses

$$x = \overline{Oa}, \qquad x' = \overline{Ob};$$

dès lors X, qui est égal au segment ab, a pour valeur (n° 6) $x' - x$; on a donc

$$X = x' - x.$$

De même

$$Y = y' - y,$$
$$Z = z' - z.$$

On peut aussi rattacher directement ce résultat au théorème des projections en considérant la ligne polygonale OAB et remarquant que le vecteur OB ferme cette ligne. La projection de OB sur un des trois axes est donc égale à la somme des projections de OA et AB sur le même axe. On a ainsi

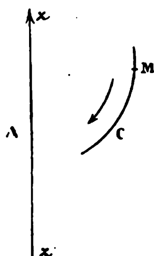
$$x' = x + X, \qquad y' = y + Y, \qquad z' = z + Z,$$

d'où l'on tire immédiatement X, Y, Z.

16. Sens positif de la rotation autour d'un axe orienté. — Soit un axe orienté Δ sur lequel on a fait choix d'un sens positif $z'z$ indiqué par une flèche (*fig.* 24). Imaginons un point M qui se meut dans l'espace en suivant une courbe quelconque C,

non située dans un même plan avec l'axe; on dit que le point tourne autour de l'axe dans le sens positif quand un observateur debout le long de l'axe, les pieds en z' et la tête en z, voit le point marcher de sa gauche vers sa droite. Dans le cas contraire, on dit que le point tourne autour de l'axe dans le sens négatif.

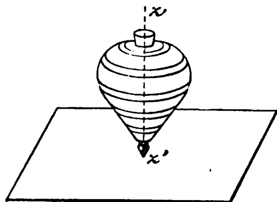
Fig. 24.



Par exemple, si l'on pose une montre sur une table, le cadran en l'air, et si par le centre de la montre on mène un axe vertical, orienté positivement vers le haut, les extrémités des aiguilles tournent autour de cet axe dans le sens positif.

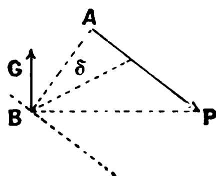
Revenons au cas général et supposons l'axe $z'z$ réalisé matériellement; puis prenons l'extrémité z de l'axe entre les doigts de la main droite; le sens positif est le sens dans lequel on tend naturellement à faire tourner l'axe entre les doigts. Ainsi, quand on veut faire tourner une toupie sur une table, on prend l'extrémité z de l'axe $z'z$ entre les doigts de la main droite (*fig.* 25), et on la fait naturellement tourner dans le sens positif autour de la verticale ascendante $z'z$.

Fig. 25.



17. Moment linéaire d'un vecteur par rapport à un point. — Soit (*fig.* 26) un vecteur P d'origine A et un point arbitraire B de l'espace. Le *moment linéaire* du vecteur P par rapport au point B est un autre vecteur BG d'origine B ayant : 1° une longueur BG égale numériquement au produit Pδ du vecteur par sa distance δ au point B; 2° une direction perpendiculaire au plan BAP déterminé par le vecteur et le point B; 3° un sens tel qu'un mobile parcourant le vecteur AP de A vers P tourne dans le sens positif autour de l'axe orienté BG.

Fig. 26.



Ces définitions déterminent complètement le moment linéaire BG. On peut remarquer que, si un mobile suivait le moment linéaire BG de B vers G, il tournerait aussi dans le sens positif autour de l'axe orienté AP.

Quand on représente les longueurs et les vecteurs à la même échelle, ce que nous supposerons constamment par la suite, la grandeur Pδ du moment linéaire BG est numériquement égale au double de l'aire du triangle BAP.

Le moment linéaire d'un vecteur P par rapport à un point ne change évidemment pas quand on transporte ce vecteur en un point quelconque de sa direction sans altérer ni sa grandeur ni son sens. Si,

laissant la grandeur et la direction d'un vecteur invariables, on changeait son sens, son moment linéaire par rapport à un point changerait lui-même de sens.

Le moment linéaire d'un vecteur P par rapport à un point B reste le même en grandeur, direction et sens quand, laissant le vecteur invariable, on déplace le point B sur une parallèle au vecteur.

La distance δ se nomme le *bras de levier* du vecteur relativement au point B.

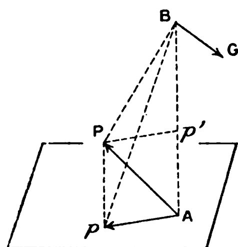
Cas où le moment linéaire d'un vecteur est nul. — Pour que le moment linéaire $BG = P\delta$ soit nul, il faut et il suffit que l'un des facteurs P ou δ soit nul; donc il faut et il suffit, ou bien que le vecteur soit nul, ou bien que sa direction passe par le point B par rapport auquel on prend le moment. Ces deux cas sont précisément les seuls cas dans lesquels le plan BAP serait indéterminé.

18. Théorème. — *Le moment linéaire d'un vecteur* AP *par rapport à un point* B *est égal au moment linéaire, par rapport au même point, de la projection du vecteur sur un plan mené par* A *perpendiculairement à* AB.

Soient en effet (*fig.* 27) un vecteur AP d'origine A et un point B; menons par A un plan perpendiculaire à BA et appelons p la projection orthogonale du vec-

teur P sur ce plan; il faut montrer que les deux vecteurs P et p ont même moment linéaire par rapport à B. En effet, ces deux moments ont même grandeur, car les deux triangles BAP et BAp sont évidemment équivalents dès qu'on leur donne comme base commune BA; ils ont même direction, car ils sont perpendiculaires aux deux plans BAP et BAp qui se confondent; ils ont aussi même sens, car un mobile suivant l'un ou l'autre des vecteurs AP ou Ap tourne dans le même sens autour d'une perpendiculaire élevée en B au plan BAPp.

Fig. 27.



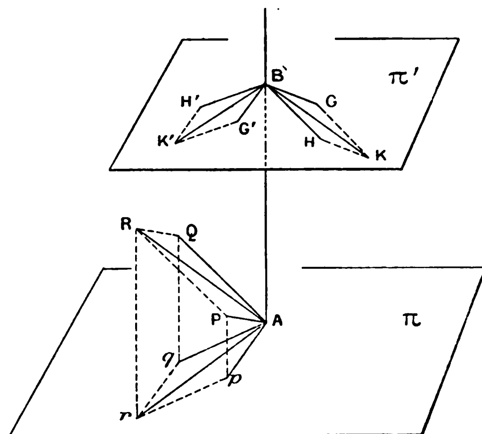
19. Théorème fondamental. — *Le moment linéaire, par rapport à un point, de la résultante de plusieurs vecteurs de même origine est égal à la somme géométrique des moments linéaires de ces vecteurs.*

Nous démontrerons d'abord le théorème pour deux vecteurs de même origine; nous passerons de là au cas d'un nombre quelconque de vecteurs.

Deux vecteurs. — Soient deux vecteurs concourants AP et AQ appliqués au point A, AR leur somme géométrique ou résultante (*fig.* 28). Prenons les

moments linéaires respectifs BG, BH, BK de ces trois vecteurs par rapport à un point quelconque B; il faut montrer que le vecteur K est la somme géométrique des vecteurs G et H. Pour cela, menons par A un

Fig. 28.



plan Π perpendiculaire à AB et appelons p, q, r les projections des trois vecteurs P, Q, R sur ce plan; comme la projection d'un parallélogramme est un parallélogramme, le vecteur r est la somme géométrique des vecteurs p et q.

D'après le théorème I, les moments linéaires des vecteurs P, Q, R par rapport à B sont identiques à ceux des vecteurs p, q, r; ils sont donc égaux aux produits de p, q, r par BA et perpendiculaires aux

plans BAp, BAq, BAr dans le sens indiqué par la définition des moments linéaires. Ces trois moments G, H, K sont évidemment dans un même plan Π' perpendiculaire à AB au point B. Cela posé, menons par B trois vecteurs BG′, BH′ et BK′ respectivement parallèles aux vecteurs p, q, r, de même sens qu'eux et égaux aux produits de p, q, r par BA :

$$BG' = p \times BA, \qquad BH' = q \times BA, \qquad BK' = r \times BA.$$

Ces trois vecteurs sont également dans le plan Π'. La figure BG′K′H′ est alors homothétique de Aprq, et, comme cette dernière est un parallélogramme de diagonale Ar, la première est un parallélogramme de diagonale BK′.

Mais, maintenant, pour obtenir les trois moments linéaires BG, BH et BK de p, q, r, par rapport à B, il suffit de faire tourner l'ensemble des trois vecteurs BG′, BH′, BK′ d'un angle droit autour de BA dans le sens positif des rotations : donc BK est la diagonale du parallélogramme construit sur BG et BH, ce qui démontre le théorème.

Nombre quelconque de vecteurs de même origine. — Soient n vecteurs P_1, P_2, ..., P_n ayant même origine A, et R leur résultante. Construisons les moments linéaires BG_1, BG_2, ..., BG_n de ces vecteurs par rapport à un point B et soit BG le moment linéaire de R. Il faut montrer que BG est la somme géométrique de BG_1, BG_2, ..., BG_n.

On pourrait employer la même méthode que précédemment en remplaçant tous les vecteurs par leurs projections sur le plan Π mené par A perpendiculairement à AB, et remarquant que la projection de la résultante R sur ce plan est la somme géométrique des projections des composantes.

Nous emploierons une autre méthode qui consiste à montrer que, si le théorème est vrai pour $n-1$ vecteurs de même origine, il l'est pour n. Soit Q la résultante des $n-1$ vecteurs $P_1, P_2, \ldots, P_{n-1}$ et BH son moment linéaire par rapport à B. Par hypothèse, BH est la somme géométrique de $BG_1, BG_2, \ldots, BG_{n-1}$

$$(BH) = (BG_1) + (BG_2) + \ldots + (BG_{n-1}).$$

La résultante R des n vecteurs donnés $P_1, P_2, \ldots, P_n$ s'obtient en composant Q avec P_n; donc le moment linéaire BG de R est la somme géométrique des moments BH et BG_n de Q et de P_n

$$(BG) = (BH) + (BG_n).$$

Il en résulte

$$(BG) = (BG_1) + (BG_2) + \ldots + (BG_n),$$

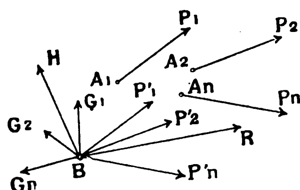
ce qui démontre le théorème.

20. Système de vecteurs quelconques; somme géométrique ou résultante générale et moment résultant par rapport à un point. — Soient des vecteurs $A_1P_1, A_2P_2, \ldots, A_nP_n$ placés d'une façon

quelconque dans l'espace (*fig.* 29). Prenons un point B quelconque, et faisons les deux constructions suivantes :

1° Par le point B menons des vecteurs BP'_1, BP'_2, ..., BP'_n égaux et parallèles aux vecteurs proposés, et construisons leur somme géométrique BR; ce vecteur R est, par définition, la *somme géométrique ou résultante générale des vecteurs donnés relativement au point* B.

Fig. 29.



2° Prenons les moments linéaires BG_1, BG_2, ..., BG_n des vecteurs proposés par rapport au point B et construisons leur somme géométrique BH; ce vecteur est, par définition, le *moment résultant des vecteurs donnés par rapport au point* B.

A chaque point B de l'espace correspond ainsi une somme géométrique et un moment résultant. Quand le point B se déplace, la somme géométrique reste la même en grandeur, direction et sens, comme il résulte de sa définition même, mais le moment résultant change en général.

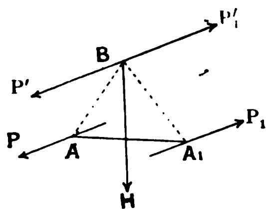
Application à un système de vecteurs de même origine. — Si l'on imagine en particulier un système de

vecteurs AP_1, AP_2, ..., AP_n ayant même origine, leur somme géométrique relative au point A n'est autre chose que leur résultante R, et leur moment résultant relatif au point A est évidemment nul.

Pour tout autre point B, la somme géométrique des vecteurs considérés est égale à leur résultante R en grandeur, direction et sens; leur moment résultant BH par rapport au point B est, d'après le théorème précédent, égal au moment de leur résultante AB par rapport au même point : il est donc perpendiculaire à la somme géométrique.

21. Couple de vecteurs : axe d'un couple. — Appliquons en particulier les définitions précédentes à un système de deux vecteurs P et P_1 égaux, parallèles et de sens contraires (*fig.* 30). Ce système de deux vecteurs s'appelle un *couple de vecteurs*.

Fig. 30.

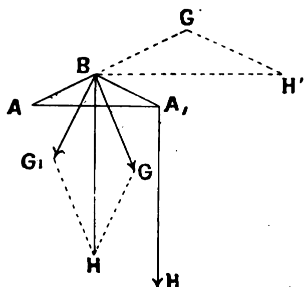


Soit B un point quelconque de l'espace; si l'on mène par ce point deux vecteurs BP' et BP'_1 égaux et parallèles aux deux vecteurs donnés, leur somme géométrique est évidemment nulle.

Cherchons, d'autre part, le moment résultant relatif au point B; nous démontrerons que *ce moment résultant est le même en grandeur, direction et*

sens, quel que soit le point B *choisi.* Pour cela, remarquons que, si l'on a abaissé du point B des perpendiculaires BA et BA_1 sur les deux vecteurs P et P_1, le plan BAA_1 est perpendiculaire à la direction commune des vecteurs et les deux moments linéaires BG et BG_1 des vecteurs par rapport à B sont dans ce plan, ainsi que leur moment résultant BH.

Fig. 31.



Prenons ce plan pour plan de la figure 31, le vecteur P étant supposé dirigé en avant du plan de la figure et le vecteur P_1 en arrière.

Le moment linéaire de P par rapport à B est un vecteur $BG = P \times AB$ situé dans le plan de la figure, perpendiculaire à AB, dans le sens indiqué. De même, le moment linéaire de P_1 par rapport à B est un vecteur $BG_1 = P \times A_1B$, car $P_1 = P$, perpendiculaire à A_1B. Le moment résultant BH est la diagonale du parallélogramme construit sur BG et BG_1; ce vecteur est perpendiculaire à AA_1 et égal à $P \times AA_1$. En effet, si l'on faisait tourner le triangle BGH d'un angle droit autour de B, dans son plan, on l'amènerait dans la position BG'H', dans laquelle les côtés BG' et G'H' seraient parallèles aux côtés AB et BA_1 de même

sens qu'eux et égaux aux produits de ces côtés par P; le troisième côté BH serait donc amené aussi à être parallèle à AA_1, de même sens que AA_1 et égal au produit $P \times AA_1$. Donc, avant la rotation du triangle, le côté BH était perpendiculaire à AA_1, c'est-à-dire au plan du couple, et égal à $P \times AA_1$. Il reste donc le même en grandeur, direction et sens, quel que soit le choix du point B.

Le moment résultant d'un couple de vecteurs s'appelle l'*axe du couple*.

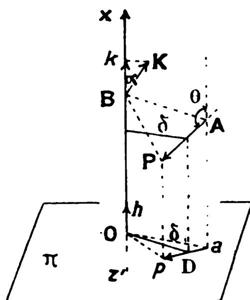
L'axe d'un couple est ainsi un vecteur défini en grandeur, direction et sens, mais non en position, car son point d'application est un point quelconque B de l'espace. Pour obtenir les éléments de cet axe (grandeur, direction et sens), il suffit de prendre le moment résultant du couple par rapport à un point particulier, par exemple par rapport au point A_1 pris sur l'un des vecteurs P_1 du couple; l'axe du couple est le moment résultant des deux vecteurs P et P_1 par rapport au point A_1 (*fig.* 31); comme le moment de P_1 est nul, l'axe se réduit au moment linéaire A_1H_1 de P par rapport au point A_1; il est donc égal au produit de P par la plus courte distance AA_1 des deux vecteurs, perpendiculaire au plan du couple et dirigé dans un sens tel qu'un mobile suivant AP tourne autour de A_1H_1 dans le sens positif. La distance des deux vecteurs est le *bras de levier du couple;* la grandeur $P \times AA_1$ de l'axe est le *moment du couple*. On peut remarquer que ce moment est égal à l'aire

du parallélogramme construit sur les deux vecteurs du couple.

Quand le moment d'un couple est nul, ou bien le facteur P est nul et les deux vecteurs du couple sont nuls, ou bien le bras de levier AA_1 est nul et les deux vecteurs sont égaux et directement opposés.

22. Moment par rapport à un axe. — Soit un axe $z'z$ sur lequel on a fixé un sens positif, de z' vers z par exemple, et un vecteur P appliqué au point A; *le moment du vecteur par rapport à l'axe est la valeur algébrique du moment linéaire de la projection du vecteur sur un plan perpendiculaire à l'axe par rapport au pied de l'axe sur ce plan.*

Fig. 32.



Menons, d'après cela (*fig.* 32), un plan quelconque Π perpendiculaire à l'axe, appelons O le pied de l'axe sur ce plan et *ap* la projection du vecteur AP sur ce plan. Le moment linéaire de *ap* par rapport au point O est un vecteur O*h* dirigé suivant O*z*. Le moment de AP par rapport à l'axe est le segment $\overline{Oh}$, c'est-à-dire la longueur O*h* précédée du signe + ou du signe — suivant que O*h* est dirigé

dans le sens positif de l'axe ou en sens contraire. Dans la figure 32, ce moment est positif.

Remarques sur la grandeur et le signe du moment d'un vecteur par rapport à un axe. — Soit δ la plus courte distance du vecteur AP à l'axe; cette plus courte distance se projette en vraie grandeur sur le plan Π, suivant la perpendiculaire OD à ap. La valeur absolue du moment Oh par rapport à l'axe $z'z$ est égale à $ap \times \delta$, c'est-à-dire au double de l'aire Oap; quant au signe à donner à ce moment, il est $+$ ou $-$ suivant qu'un mobile parcourant ap tourne autour de $z'z$ dans le sens positif ou le sens négatif des rotations.

Si l'on désigne par θ l'angle du vecteur AP avec l'axe $z'z$, on a évidemment $ap = \mathrm{AP}\sin\theta$. Le moment du vecteur AP par rapport à l'axe est donc aussi $\pm\, \mathrm{AP}.\delta.\sin\theta$, où il faut prendre $+$ ou $-$ suivant qu'un mobile allant de A en P tourne autour de $z'z$ dans le sens positif ou le sens négatif des rotations.

Le moment d'un vecteur par rapport à un axe ne change pas quand on fait glisser le vecteur le long de la droite indéfinie qui le porte. En effet, cette opération ne change aucun des trois facteurs AP, δ, $\sin\theta$, ni le signe à prendre devant le produit.

Si deux vecteurs sont égaux et directement opposés, leurs moments par rapport à un même axe sont égaux et de signes contraires. En effet,

les trois facteurs sont les mêmes pour les deux moments; les signes seuls sont différents.

Cas où le moment est nul. — D'après la dernière expression, le moment par rapport à un axe est le produit de trois facteurs : 1° le vecteur donné; 2° sa plus courte distance à l'axe; 3° le sinus de l'angle du vecteur avec l'axe.

Pour que le moment soit nul, il faut et il suffit que l'un de ces facteurs le soit, c'est-à-dire : 1° que le vecteur soit nul; 2° ou bien qu'il rencontre l'axe; 3° ou bien qu'il soit parallèle à l'axe.

Dans les deux derniers cas, le vecteur est dans un même plan avec l'axe; donc, pour qu'un vecteur ait un moment nul par rapport à un axe, il faut et il suffit : ou bien que le vecteur soit nul, ou bien qu'il soit dans un même plan avec l'axe.

23. **Théorème.** — *Le moment d'un vecteur, par rapport à un axe, est la valeur algébrique de la projection sur cet axe du moment linéaire du vecteur par rapport à un point quelconque pris sur l'axe.*

Soit (*fig.* 32) un point quelconque B pris sur l'axe $z'z$; construisons le moment linéaire BK du vecteur AP par rapport au point B, et projetons ce vecteur en Bk sur l'axe. Il faut montrer que le moment de AP par rapport à l'axe est égal au segment Bk,

avec son signe, c'est-à-dire que $Bk = Oh$ en grandeur et signe. On voit d'abord sur la figure que les deux segments Bk et Oh ont même sens, c'est-à-dire même signe. Il reste à voir qu'ils ont même valeur absolue.

Pour cela, appelons α l'angle aigu de BK avec $z'z$; on a en valeur absolue $Bk = BK \cos\alpha$. Mais BK est égal au double de l'aire BAP; donc

$$Bk = 2\,BAP \cos\alpha.$$

D'autre part,

$$Oh = 2\,Oap;$$

le triangle Oap étant la projection du triangle BAP, on a

$$Oap = BAP \cos\alpha,$$

car l'angle du plan BAP avec le plan de projection Π est égal à l'angle α des perpendiculaires BK et Oz à ces deux plans. On a donc

$$Oh = 2\,BAP \cos\alpha,$$

d'où

$$Bk = Oh.$$

Le théorème est donc démontré.

24. Corollaire I. — *Le moment de la résultante de plusieurs vecteurs de même origine par rapport à un axe est égal à la somme algébrique des moments de ces vecteurs.*

En effet, prenons un point quelconque B sur l'axe; nous avons vu que le moment linéaire du vecteur résultant par rapport au point B est la somme géométrique des moments des vecteurs composants : en projetant sur l'axe, on voit que la projection du moment linéaire du vecteur résultant est égale à la somme des projections des moments linéaires des vecteurs composants; ce qui démontre la proposition.

25. Corollaire II. — *Étant donnés des vecteurs quelconques, la somme algébrique de leurs moments par rapport à un axe est égale à la projection, sur cet axe, du moment résultant par rapport à un point quelconque de l'axe.*

En effet, prenons un point quelconque B sur l'axe; par définition, le moment résultant des vecteurs donnés par rapport à B est la somme géométrique des moments linéaires des divers vecteurs par rapport à B. La projection de ce moment résultant sur l'axe est donc égale à la somme des projections des moments linéaires des divers vecteurs sur ce même axe; ce qui démontre la proposition.

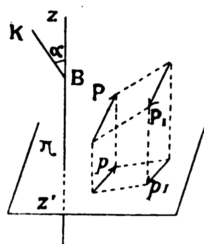
26. Corollaire III. — *La somme algébrique des moments des deux vecteurs d'un couple, par rapport à un axe, est égale à la projection sur cet axe de l'axe du couple.*

Cette proposition est un cas particulier de la pré-

cédente. Prenons un point B quelconque sur l'axe des moments; le moment résultant BK ou axe du couple est la somme géométrique des moments linéaires des deux vecteurs du couple par rapport à B. La projection de l'axe BK (*fig.* 33) du couple sur l'axe des moments est donc égale à la somme des projections des moments linéaires des deux vecteurs du couple par rapport à B, c'est-à-dire à la somme des moments des deux vecteurs par rapport à l'axe des moments.

Remarque. — Appelons α l'angle du plan du couple PP_1 avec un plan Π perpendiculaire à l'axe des moments; l'axe BK du couple est perpendiculaire au plan du couple et égal à l'aire du parallélogramme PP_1; il fait avec $z'z$ l'angle α. La somme des moments des deux vecteurs du couple par rapport à $z'z$, étant la projection de l'axe BK sur $z'z$, est égale à $BK \cos\alpha$ ou à *aire* $PP_1 \cos\alpha$, c'est-à-dire à l'aire du parallélogramme pp_1, projection du parallélogramme PP_1 sur le plan Π.

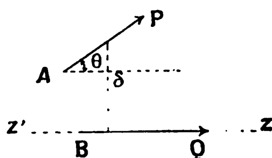
Fig. 33.



27. Moment relatif de deux vecteurs. Tétraèdre et parallélépipède construits sur deux vecteurs. – Soient, dans l'espace, deux vecteurs AP,

BQ d'origines A et B, d'extrémités P et Q (*fig*. 34). Considérons l'un des vecteurs, BQ par exemple, comme un axe orienté $z'z$ sur lequel on a pris comme sens positif le sens BQ ; alors un mobile suivant l'autre vecteur AP de l'origine A vers l'extrémité P tourne autour de BQ dans le sens positif ou le sens négatif. L'inspection de la figure montre que ce sens est le même que le sens dans lequel un mobile allant de B en Q tournerait autour de l'axe orienté AP.

Fig. 34.



Appelons alors θ l'angle des directions des deux vecteurs AP, BQ, δ leur plus courte distance; on nomme *moment relatif des deux vecteurs* AP et BQ *le produit*

$$\pm \mathrm{AP}.\mathrm{BQ}.\delta.\sin\theta,$$

où il faut prendre le signe + ou le signe — suivant que le sens de rotation précédemment défini est positif ou négatif.

Cette notion constitue une généralisation de la notion du moment d'un vecteur AP par rapport à un axe $z'z$: en effet, prenons sur l'axe $z'z$ dans le sens positif un vecteur BQ de longueur 1; le moment relatif de AP et BQ est alors

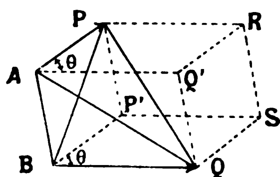
$$\pm \mathrm{AP}.\delta.\sin\theta,$$

car BQ = 1; il se réduit donc au moment de AP par rapport à l'axe (n° 22).

Théorème I. — *La valeur absolue du moment relatif de deux vecteurs* AP, BQ *est égale au volume du parallélépipède construit sur ces vecteurs.*

Menons par A (*fig.* 35) un vecteur AQ′ équipollent à BQ, par B un vecteur BP′ égal et parallèle à AP; construisons le parallélogramme APRQ′ ayant AP et AQ′ comme côtés, puis le parallélogramme BQSP′ ayant BQ et BP′ comme côtés. En joignant AB, PP′, QQ′, RS, nous avons ainsi les arêtes d'un parallélépipède. Nous allons voir que le volume de ce parallélépipède est la valeur absolue du moment relatif des deux vecteurs. En effet la base BQSP′ a pour surface

Fig. 35.



$$AP.BQ.\sin\theta,$$

car l'angle QBP′ est égal à l'angle θ des deux vecteurs et ses côtés BQ et BP′ sont égaux aux deux vecteurs. Quant à la hauteur, elle est la distance des deux plans APRQ′ et BQSP′, c'est-à-dire la plus courte distance δ des deux vecteurs donnés AP et PQ. Le volume est

donc

$$V = AP.BQ.\sin\theta. \times \delta;$$

c'est la valeur absolue du *moment relatif*.

Théorème II. — *La valeur absolue du moment relatif de deux vecteurs est égale à six fois le volume du tétraèdre construit sur ces deux vecteurs.*

Joignons le point A aux points B et Q (*fig.* 35), le point P aux points B et Q. Nous obtenons les six arêtes d'un tétraèdre de sommets APBQ. Il est facile de voir que le volume de ce tétraèdre est le sixième du volume du parallélépipède que nous avons construit sur les deux vecteurs donnés. En effet, en donnant comme base au parallélépipède la face ABQQ′ et comme base au tétraèdre la face ABQ, on voit que les deux solides ont même hauteur et que la base du tétraèdre est la moitié de la base du parallélépipède. Son volume est donc le sixième du volume du parallélépipède.

Valeur algébrique du volume du tétraèdre construit sur deux vecteurs. — On convient de donner au volume du tétraèdre construit sur deux vecteurs AP, BQ le signe du moment relatif des deux vecteurs. Le volume est alors un nombre positif ou négatif qu'on appelle *valeur algébrique du volume*. Avec

cette convention, le moment relatif de deux vecteurs est égal, en grandeur et signe, à six fois la valeur algébrique du volume du tétraèdre AP, BQ.

28. Remarques sur le moment relatif de deux vecteurs. — 1° Le moment relatif de deux vecteurs ne change pas quand on fait glisser l'un des vecteurs sur la droite indéfinie qui le porte. En effet, cette opération ne change aucun des facteurs AP, BQ, δ, $\sin\theta$, ni le signe à donner au produit de ces facteurs.

2° Pour que le moment relatif de deux vecteurs soit nul, il faut et il suffit, ou bien que l'un des vecteurs soit nul, ou que les vecteurs se rencontrent ($\delta = 0$), ou qu'ils soient parallèles ($\sin\theta = 0$).

En effet, le moment relatif de deux vecteurs est le produit de quatre facteurs, et, pour qu'il soit nul, il faut et il suffit qu'un des facteurs le soit.

On peut dire aussi que, pour que le moment relatif des deux vecteurs AP, BQ soit nul, il faut et il suffit que les quatre points A, P, B, Q soient *dans un même plan.*



CHAPITRE II.

CINÉMATIQUE.

I. — MOUVEMENT; TEMPS.

29. Cinématique. — En Géométrie, on considère des mouvements indépendamment de la notion de temps; c'est ainsi, par exemple, que l'on imagine des figures qui se déplacent pour être transportées sur d'autres, ou des figures qui tournent pour engendrer des surfaces et des volumes; mais on ne se préoccupe pas du temps pendant lequel se font ces mouvements, ni, par conséquent, du plus ou moins de rapidité avec laquelle ils s'effectuent.

En *Cinématique,* on fait intervenir, à côté de l'idée de mouvement, l'idée de *temps.* On peut dire que la Cinématique est l'étude des mouvements dans leurs rapports avec le temps. Pour évaluer toutes les quantités qu'on définit et qu'on mesure en Cinématique, il suffit de faire choix de deux unités fondamentales, l'unité de *longueur* et l'unité de *temps.*

Nous nous occuperons d'abord de préciser l'idée de mouvement, puis l'idée de temps.

30. Systèmes invariables ou corps solides. — Les figures géométriques peuvent être considérées comme formées de points. On peut également regarder les corps matériels comme formés d'un grand nombre de particules assez petites pour que la position de chacune d'elles puisse être définie comme celle d'un point; on appelle alors ces particules des *points matériels*.

Un système de points géométriques ou matériels est dit *invariable*, ou encore *solide*, quand les distances mutuelles de ces points sont invariables : ces points sont alors immobiles les uns par rapport aux autres. Les corps appelés communément *solides*, une pierre, un morceau de fer ou de bois, forment des systèmes à peu près invariables. Certaines figures géométriques bien définies forment également des systèmes invariables : tels sont, par exemple, un triangle dont les côtés ont des longueurs déterminées, une sphère de rayon constant, un trièdre trirectangle.

31. Systèmes non invariables ou déformables. — Un ensemble de points ne formant pas un système *invariable* constitue un système *déformable*. Tels sont, par exemple, un fil flexible, un ressort, une masse d'eau ou d'air.

32. Du mouvement; sa relativité. — Quand on dit qu'un corps est *en repos* ou *en mouvement,* on sous-entend toujours que ce repos et ce mouvement ont lieu *par rapport* à certains autres corps regardés comme fixes. Par exemple, quand on dit qu'une bille posée sur un billard reste immobile, cela signifie que les distances des divers points qui forment la bille aux divers points qui forment le billard sont invariables; quand la bille est en mouvement sur le billard, les distances de ses divers points aux points du billard varient avec le temps.

Le billard est en repos par rapport à la maison qui le contient; celle-ci est en repos par rapport à la Terre; mais la Terre est en mouvement par rapport aux étoiles.

Un train en marche est en mouvement par rapport à la Terre, aux maisons, parce que les distances des divers points formant le train à ceux qui constituent la Terre, les maisons, varient constamment.

Une personne assise dans le train peut rester en repos à sa place, c'est-à-dire rester immobile par rapport au compartiment qu'elle occupe; elle est en mouvement par rapport à la Terre, aux maisons, etc.; cette personne peut changer de place dans son compartiment, elle est alors en mouvement par rapport au compartiment et aussi par rapport à la Terre.

Les arbres, les champs situés sur le passage du train sont en repos les uns par rapport aux autres et par rapport à la Terre, mais ils sont en mouvement

par rapport au train; le voyageur assis dans le train peut se donner facilement la sensation que le train est immobile et que le paysage se déplace : il observe alors le mouvement du paysage par rapport au train.

Les exemples de corps qui sont ainsi en repos ou en mouvement, suivant qu'on étudie leurs relations de distances à un corps ou à un autre, sont tous analogues à ceux que nous venons de présenter. En voici quelques autres :

Un homme reste debout immobile sur un trottoir roulant : il est en mouvement par rapport à la Terre. S'il se met à marcher, il sera en mouvement par rapport au trottoir; le plus souvent, il sera, en même temps, en mouvement par rapport à la Terre; cependant, si, tout en marchant sur le trottoir, il s'appuie de la main sur un arbre devant lequel passe le trottoir roulant, il pourra maintenir certaines parties de son corps, sa main, par exemple, immobiles par rapport à la Terre.

La Terre est en mouvement par rapport au Soleil, à la Lune, aux planètes; ces divers corps sont en mouvement les uns par rapport aux autres.

D'après cela, l'idée de mouvement est essentiellement relative; quand on dit qu'un corps est en repos ou en mouvement, cette proposition n'a aucun sens si l'on n'indique pas quels sont les autres corps par rapport auxquels on définit le repos ou le mouvement.

33. Repères d'un mouvement ou système de comparaison. — On appelle *repères d'un mouvement* ou *système de comparaison* le système invariable par rapport auquel on étudie un mouvement. Ainsi quand on dit qu'un voyageur est en repos ou en mouvement dans son compartiment, on prend comme système de comparaison le compartiment. Quand on dit qu'un train est en marche, qu'une pierre abandonnée à elle-même tombe suivant la verticale, que le Soleil se lève ou se couche, on prend comme système de comparaison la Terre. En Astronomie et en Mécanique céleste, on étudie les mouvements de la Terre, des planètes, du Soleil, par rapport à l'ensemble des étoiles dites *fixes* par définition; le système de comparaison est alors le système des étoiles fixes.

34. Divisions de la Cinématique. — Un corps quelconque pouvant être regardé comme formé par la réunion de points, on commence, en Cinématique, par étudier le mouvement d'un *point géométrique* par rapport au système de comparaison choisi. Une fois qu'on aura bien pénétré les particularités que présente le mouvement d'un point, on étudiera les mouvements des corps quelconques en les envisageant comme des systèmes de points. La Cinématique se divise ainsi tout naturellement en *Cinématique du point* et *Cinématique des systèmes;* cette dernière se subdivise en Cinématique des systèmes invariables

ou solides, et en Cinématique des systèmes déformables.

35. Mouvement d'un point; trajectoire. — Soit un point en mouvement par rapport à un certain système de comparaison. Le point en mouvement s'appelle un *mobile;* le lieu de ses positions successives par rapport au système de comparaison constitue une courbe, invariablement liée à ce système, appelée la *trajectoire* du point.

Voici quelques exemples de mouvements et de trajectoires de points.

Exemples de mouvements et de trajectoires. — Un point qui tombe librement à la surface de la Terre sous l'effet de son poids décrit, par rapport à la Terre, une ligne droite (trajectoire rectiligne) qui est la *verticale* du lieu; si le point a été lancé obliquement sur le plan de l'horizon, il décrit une trajectoire qui, dans le vide, serait un arc de parabole, mais que la résistance de l'air transforme en une courbe plus compliquée.

Quand un cerceau dont le plan est vertical roule sur une droite $x'x$ du plan horizontal, son centre décrit une trajectoire rectiligne parallèle à $x'x$; mais si nous portons notre attention sur un point de la circonférence du cerceau, point que nous aurons marqué à la craie, par exemple, nous verrons ce point tantôt s'abaisser jusqu'à toucher le sol $x'x$, tantôt

s'élever jusqu'à une distance du sol égale au diamètre du cerceau; ce point décrit, par rapport à la Terre, une trajectoire située dans un plan vertical et qui est une courbe appelée *cycloïde*.

Un point du balancier d'une horloge possède, par rapport à la Terre, un mouvement de va-et-vient sur un arc de cercle (trajectoire circulaire).

Les organes d'une machine, d'une locomotive, par exemple, nous montrent des points mobiles décrivant des trajectoires variées et très différentes, suivant qu'on les rapporte à la machine elle-même ou à la Terre.

Relativement à la machine, un point quelconque des pistons décrit une trajectoire rectiligne sur laquelle il oscille d'un mouvement de va-et-vient régulier; un point quelconque d'une roue décrit une circonférence; sur la *bielle,* organe qui transmet le mouvement du piston à la roue, la tête est animée d'un mouvement de va-et-vient rectiligne, l'extrémité articulée à la roue décrit une circonférence et les autres points des courbes d'une nature plus compliquée. *Relativement à la Terre,* en supposant la voie rectiligne, les centres des roues décrivent des lignes droites, les points de leurs circonférences des cycloïdes, etc.

36. **Mesure du temps.** — L'idée de *temps* résulte pour notre esprit de l'observation de phénomènes *simultanés* ou *successifs*. L'observation journalière

nous montre que les phénomènes les plus ordinaires ont un commencement, une durée et une fin, et en comparant le développement de divers phénomènes convenablement choisis, nous avons cette notion que les uns se produisent avant, ou pendant, ou après les autres; c'est l'idée de temps.

Un intervalle de temps nous paraît plus ou moins long; nous allons montrer comment ou peut le *mesurer,* c'est-à-dire exprimer sa durée par un nombre, absolument de la même façon qu'on exprime par un nombre une longueur ou un poids.

Intervalles de temps égaux. — Imaginons un phénomène qu'on peut reproduire plusieurs fois de suite, de la même manière et dans des conditions toujours identiques; nous dirons que les intervalles de temps successifs nécessaires à l'accomplissement du phénomène sont *égaux.* Par exemple, si l'on prend des billes exactement pareilles et qu'on les laisse tomber, en un même lieu, de la même hauteur dans un air absolument tranquille, on peut admettre que les durées des chutes sont *égales.* De même, si l'on a des pendules, comme des balanciers d'horloge, tous identiques, et si on les fait osciller de la même façon, on pourra admettre que les durées des oscillations sont *égales.*

Addition des temps. — Si l'on considère deux phénomènes successifs, l'un commençant au moment

où l'autre finit, la durée totale de l'ensemble des deux phénomènes est la somme des durées de chacun d'eux.

Multiplication. — En particulier, on pourra définir un intervalle de temps double, triple, etc., d'un autre, comme étant la somme de deux, trois, etc., intervalles de temps égaux au premier. Il suffira, pour cela, d'avoir recours à un phénomène se reproduisant périodiquement, c'est-à-dire à un phénomène toujours le même qui recommence dès qu'il est terminé. Par exemple, si l'on prend des billes exactement pareilles et qu'on les laisse tomber de la même hauteur, de telle façon que la chute de l'une des billes commence au moment où celle de la précédente finit, l'intervalle de temps nécessaire pour la chute successive de deux, trois, etc. billes sera double, triple, etc. de l'intervalle de temps nécessaire pour la chute d'une bille.

Division du temps. — Si l'on veut diviser un intervalle de temps en un certain nombre n de parties égales, il suffit de produire un phénomène périodique, dans des conditions toujours les mêmes, qui se reproduise n fois pendant l'intervalle de temps considéré. La durée de ce phénomène sera la $n^{\text{ième}}$ partie de l'intervalle de temps considéré.

37. Appareils servant à mesurer le temps. —

On voit que, pour mesurer le temps, il suffit de construire un appareil réalisant un phénomène périodique se reproduisant successivement et indéfiniment; alors on pourra prendre la durée de ce phénomène comme *unité de temps*, et pour exprimer par un nombre un intervalle de temps quelconque, il suffira de compter combien de fois le phénomène en question se reproduit dans l'intervalle de temps à mesurer.

La périodicité absolument rigoureuse ne se rencontre jamais dans aucun phénomène naturel; mais un grand nombre ne s'en écartent qu'en vertu de lois physiques ou mécaniques dont il est possible de tenir compte; chacun d'eux peut donc être employé comme unité de temps, et cette unité restera d'autant plus facilement comparable à elle-même que les modifications qui la font varier seront mieux connues et plus faciles à corriger.

C'est ainsi qu'ont été employés les sabliers ou les vases à écoulement d'eau appelés *clepsydres;* ces derniers furent d'un emploi très répandu chez tous les peuples. Ce n'est qu'au milieu du XIVe siècle que l'on commença à employer en Europe des horloges dont la marche est réglée par les oscillations périodiques d'un pendule.

38. Du pendule.

1° **Pendule simple.** — Le pendule simple, concep-

tion purement théorique, pratiquement irréalisable, serait formé d'une masse pesante, réduite à un point, suspendue à un point fixe par un fil inextensible et sans masse. Ce pendule reste immobile si on le place sans impulsion dans la verticale du point d'attache; il constitue alors un fil à plomb. Si l'on écarte un peu le pendule de cette position d'équilibre et qu'on l'abandonne à lui-même, il tend à y revenir sous l'action de la pesanteur, la dépasse, puis retombe, etc., en oscillant de part et d'autre de la verticale.

Les deux positions extrêmes du pendule sont symétriques par rapport à la verticale du point d'attache; le passage d'une de ces positions extrêmes à sa symétrique s'appelle une *oscillation simple;* le temps t que met le pendule à accomplir l'oscillation simple est la durée de l'oscillation; la durée $T = 2t$ d'une oscillation double, aller et retour, s'appelle la *période d'oscillation;* la longueur l du fil est la longueur du pendule simple. Lorsqu'un semblable pendule oscille dans le vide, l'amplitude d'oscillation étant très petite, la durée t des oscillations est liée à la longueur l du pendule par la relation

$$t = \pi\sqrt{\frac{l}{g}},$$

où g est un nombre indépendant du pendule qu'on appelle *intensité de la pesanteur* au lieu considéré et où π désigne le rapport de la circonférence au diamètre 3,1415.... Cette formule résume les deux

lois fondamentales résultant des observations de Galilée :

1° La durée des petites oscillations du pendule simple en un lieu déterminé est indépendante de leur amplitude;

2° Cette durée est proportionnelle à la racine carrée de la longueur du pendule.

2° **Pendule composé.** — Le pendule simple étant irréalisable, on emploie, en Physique et en Mécanique, le *pendule composé*. D'une façon générale, un pendule composé est un corps solide pesant suspendu par un axe horizontal fixe, autour duquel il peut osciller : tels sont les balanciers des horloges considérés indépendamment du mécanisme de l'horloge.

Un pendule composé possède une position d'équilibre dans laquelle son centre de gravité est au-dessous de l'axe de suspension, dans le plan vertical passant par cet axe. En l'écartant un peu de cette position, puis l'abandonnant à lui-même, on le voit osciller comme un pendule simple. On démontre, en Mécanique rationnelle, qu'à tout pendule composé l'on peut faire correspondre un pendule simple dont la longueur l est telle que, dans le vide, ce pendule simple aurait, pour de petites oscillations, la même période que le pendule composé : cette longueur l s'appelle la *longueur du pendule simple synchrone*

du pendule composé. La comparaison de deux pendules composés se ramène ainsi à la comparaison des deux pendules simples synchrones.

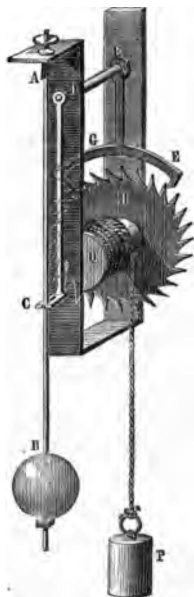
Si le mouvement oscillatoire d'un pendule composé avait lieu dans le vide, à l'abri de la résistance de l'air, s'il était possible de supprimer les frottements et les résistances qui se produisent toujours sur l'axe de suspension et d'éviter les effets des dilatations et des contractions produites par les variations de température, l'amplitude des oscillations resterait la même et le pendule oscillerait toujours de la même façon en constituant un compteur de temps parfait.

On pourrait d'ailleurs donner au pendule une longueur telle que la durée d'une oscillation soit précisément l'unité de temps employée. Mais la résistance de l'air et les frottements diminuent progressivement l'amplitude des oscillations, de telle façon que celles-ci deviennent insensibles au bout d'un certain temps : le fait que les amplitudes décroissent n'a pas d'inconvénient, car la durée des petites oscillations est indépendante de leur amplitude; l'effet des variations de température peut être compensé à peu près exactement, mais le défaut capital du pendule employé seul, comme instrument de mesure du temps, est que les oscillations, au bout d'un certain temps, cessent d'être appréciables.

On a alors imaginé des pendules entretenus mécaniquement.

39. Pendule entretenu mécaniquement; échappement à ancre. — C'est Huyghens qui, le premier, a songé à appliquer à la régulation des horloges la loi de l'isochronisme des oscillations du pendule.

Fig. 36.



Un axe O tend à tourner sous l'influence d'un poids moteur (*fig.* 36). Le moteur, figuré sur la gravure par un poids P supporté par une corde enroulée sur un *treuil* Q, n'agit, en général, sur l'axe O que par l'intermédiaire d'une série plus ou moins compliquée de roues dentées; mais son effort tend toujours à faire tourner la roue dentée, dont les dents ont une forme spéciale dite *roue à rochets* H. A l'état de repos, ce mouvement est empêché par une *ancre* à deux dents GE dont une dent bute contre une des dents de la roue à rochet et l'empêche de tourner. Cette ancre est solidaire d'un pendule AB par l'intermédiaire d'un axe DF et d'une fourchette C.

Quand le pendule oscille, la pointe E se relève et abandonne la roue à rochet qui tourne d'un petit angle; mais aussitôt la pointe opposée s'abaisse, s'engage dans les dents et arrête la roue. A l'oscillation suivante, la pointe G se relève à son tour, mais

E descend vers la roue et s'engage, non plus dans l'échancrure où elle était précédemment, mais dans la suivante, de sorte que, pour une oscillation double, la roue avance d'une dent. Le treuil tourne donc d'un angle égal à chaque oscillation, et, si son axe prolongé est muni d'une aiguille mobile sur un cadran, cette aiguille parcourt des arcs égaux en des temps égaux.

En regardant fonctionner l'appareil, on voit que le poids moteur descend; c'est lui qui, en définitive, donne, par l'intermédiaire du treuil, des dents du rochet, de l'ancre et enfin de la fourchette, une petite impulsion au pendule renouvelée à chacune de ses oscillations.

Ce système s'appelle un *échappement à ancre.*

40. Unité de temps adoptée. Temps moyen. — On a été naturellement conduit à rattacher l'unité de temps au mouvement du Soleil autour de la Terre; mais on n'a pas pu le faire d'une façon directe, car le mouvement du Soleil autour de la Terre ne constitue pas un phénomène rigoureusement périodique. On dit qu'il est *midi vrai* en un lieu quand le Soleil qui nous éclaire, qu'on appelle, en Astronomie, le *Soleil vrai,* passe au méridien supérieur du lieu; à ce moment, les cadrans solaires du lieu marquent midi, mais non les horloges. On appelle *jour vrai* l'intervalle de temps qui s'écoule entre deux midis vrais consécutifs. Les jours vrais sont *inégaux* entre

eux; il en résulte qu'une fraction déterminée de jour vrai ne peut pas servir d'unité de temps, attendu que le caractère essentiel d'une unité quelconque est l'invariabilité. Cette inégalité des jours vrais tient à ce que le Soleil parcourt en une année, sur la sphère céleste, un grand cercle appelé *écliptique* dont le plan est incliné sur l'équateur et à ce que le Soleil marche sur l'écliptique plus vite en hiver qu'en été, de sorte que les arcs d'écliptique parcourus pendant des temps égaux ne sont pas égaux.

On imagine alors un astre fictif appelé *Soleil moyen* qui décrit l'équateur céleste dans des conditions bien définies qu'il serait trop long de rappeler ici, et qui sont développées en Cosmographie; la principale de ces conditions est que le Soleil moyen décrit l'équateur dans le même sens et pendant le même temps que le Soleil vrai décrit l'écliptique, mais en parcourant des arcs d'équateur égaux en des temps égaux; le mouvement de ce Soleil fictif autour de la Terre constitue alors un phénomène rigoureusement périodique.

On dit qu'il est *midi moyen* en un lieu quand le *Soleil moyen* ainsi défini passe au méridien supérieur du lieu; le *jour moyen* est l'espace de temps qui s'écoule entre deux midis moyens consécutifs.

On divise le jour moyen en 24 heures, chaque heure en 60 minutes, chaque minute en 60 secondes. Le jour moyen contient alors $24 \times 60^2 = 86400$ de

ces secondes qu'on appelle *secondes sexagésimales de temps moyen.*

L'unité de temps adoptée dans la pratique est la seconde sexagésimale de temps moyen, c'est-à-dire *la $\frac{1}{86400}$ partie du jour solaire moyen.*

Une fois cette unité définie, on emploie fréquemment, pour mesurer le temps, les multiples ou sous-multiples de cette unité : minute, heure, dixième de seconde, etc.

Dans l'usage civil, le jour commence et finit à minuit; les 12 premières heures, de 1 à 12, sont dites *heures du matin;* la douzième porte le nom de *midi;* les 12 heures suivantes sont dites du *soir* et la dernière porte le nom de *minuit;* cependant on compte quelquefois le temps civil de minuit à minuit, de 0 à 24 heures; c'est le système adopté depuis 1900 dans l'*Annuaire du Bureau des Longitudes.*

Le temps civil en France est donné par les horloges réglées sur le temps moyen, de telle façon qu'elles marquent midi (12 heures) au moment où le Soleil moyen passe au méridien de Paris.

Les astronomes font commencer le jour à midi, et comptent les heures sans interruption de 0 à 24, de midi à midi; pour transformer le *temps civil* en *temps astronomique,* ou inversement, il suffit donc de se rappeler que le jour astronomique commence 12 heures après le jour civil; ainsi, le 3 mai, à 9^h du matin, temps civil, correspond au 2 mai, à 21^h, temps astronomique.

Comme on ne peut pas observer directement le Soleil moyen sur lequel doivent être réglées les horloges, et que le Soleil vrai seul est observable, on calcule d'avance le temps moyen à midi vrai à Paris. Les résultats de ce calcul sont donnés par une Table publiée par la *Connaissance des Temps* et par l'*Annuaire du Bureau des Longitudes*. Cette Table fait connaître, *chaque jour,* le temps moyen civil à l'instant où il est midi vrai à Paris, c'est-à-dire l'heure que doit marquer en France, ce *jour-là,* une horloge bien réglée lorsque le Soleil vrai est au méridien de Paris, ou encore lorsque les cadrans solaires de Paris marquent midi.

Par exemple, le 14 juillet 1902, le temps moyen civil, à midi vrai, était $12^h 5^m 32^s$; une horloge bien réglée devait donc marquer ce jour-là $12^h 5^m 32^s$ à l'instant du passage du Soleil au méridien de Paris.

Grâce à cette Table, on peut donc régler une horloge sur le temps moyen, comme si le Soleil moyen était réellement observable.

41. Pendule à seconde. — La formule du pendule simple permet de calculer la longueur théorique du pendule qui battrait la seconde. L'intensité de la pesanteur à Paris étant représentée sensiblement par le nombre 981, quand on prend comme unité de longueur le centimètre et comme unité de temps la seconde, il suffit de résoudre, par rapport à l, l'équa-

tion $1 = \pi\sqrt{\frac{l}{981}}$ pour avoir cette longueur exprimée en centimètres; on a ainsi

$$l = 99^{cm},38.$$

Pendule oscillant librement. — On peut former un pendule à seconde très bon et très simple en employant une tige de bois de sapin verni bien sèche et droite. Ce pendule est sensiblement indifférent aux variations de température, car le coefficient de dilatation linéaire du sapin dans le sens des fibres est seulement de $\frac{3}{1\,000\,000}$; sa grande simplicité de construction n'exclut pas une grande précision et en fait l'instrument le plus employé dans les laboratoires de Physique.

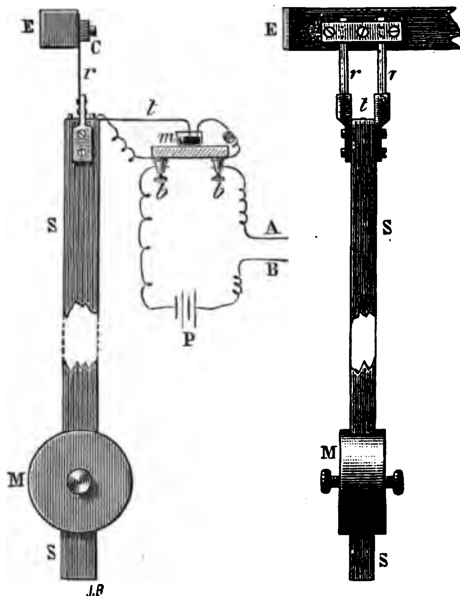
La tige est une règle plate de sapin S portant une masse de fonte M (*fig.* 37) que l'on assujettit à une hauteur convenable à l'aide d'une vis de pression. A la partie supérieure de cette tige se trouvent deux pièces de cuivre qui servent de points d'attache à deux petits ressorts plats en acier *rr*. Ces ressorts sont réunis par une barrette métallique C fixée elle-même solidement à une forte équerre E boulonnée dans un mur.

Perpendiculairement à la tige S, et dans son plan d'oscillation, est fixée une petite tige de cuivre *t* (*fig.* 37) recourbée à son extrémité, qui se termine par une pointe de platine affleurant à la surface du mercure *m* contenu dans un petit godet placé sur une

tablette d'ébonite fixée, à côté du pendule, sur le même support que lui.

Le courant d'une pile arrive en *b*, passe par un fil très fin constituant un ressort très doux, traverse la

Fig. 37.



tige et le mercure; de là il fait retour à la pile, et entre les points A et B on peut intercaler dans ce circuit des appareils variés suivant les besoins.

A chaque oscillation le courant est interrompu et établi; on peut donc transmettre dans le circuit de la pile des signaux périodiques espacés de 1 seconde.

Le plus souvent, l'expérimentateur a besoin de suivre de l'œil l'appareil en expérience, tout en comptant les secondes, sans regarder le pendule. Dans ce cas, il installera dans le circuit un électro-aimant dont l'armature sera attirée à chaque passage du courant; le bruit ainsi produit suffit pour compter les secondes : on peut, d'ailleurs, tout aussi bien, fixer dans le circuit un téléphone soutenu vers l'oreille et dans lequel on entendra un bruit à l'établissement et à la rupture du courant.

Un tel pendule peut osciller pendant plus de 1 heure et se prête donc parfaitement à des expériences d'assez longue durée.

Pour le régler, on compare la durée d'un grand nombre d'oscillations à une horloge astronomique, et l'on déplace la masse M.

42. Valeurs algébriques du temps. — Dans les calculs, on suppose habituellement qu'on compte le temps à partir d'un instant déterminé appelé *instant initial.* Alors, pour définir un autre instant quelconque, postérieur ou antérieur à l'instant initial, on se donne le nombre d'unités de temps qui sépare l'instant initial de l'instant considéré, ce nombre étant précédé du signe + ou du signe — suivant que l'instant considéré est *postérieur* ou *antérieur* à l'instant initial.

Le nombre algébrique t ainsi défini s'appelle la *valeur algébrique du temps définissant l'instant*

considéré. Ainsi, en prenant pour instant initial midi moyen et pour unité de temps la minute, les instants 11^h, $11^h 30^m$, $11^h 45^m$, midi, midi un quart, 2^h, seront -60, -30, -15, 0, $+15$, $+120$.

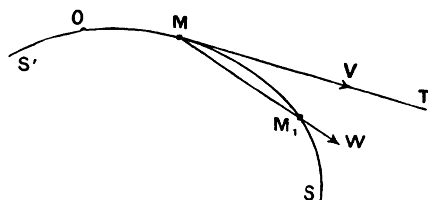
Chaque instant est alors représenté par un nombre positif ou négatif, et inversement chaque nombre algébrique représente un instant déterminé.

On peut remarquer que cette représentation du temps par un nombre algébrique est analogue à la représentation, par un nombre, d'un point sur un axe orienté.

II. — CINÉMATIQUE DU POINT.

43. Mouvement d'un point. — Imaginons un point en mouvement par rapport à un certain système de comparaison. Il décrit, par rapport à ce système,

Fig. 38.



une trajectoire S′S qui est une courbe bien déterminée (*fig*. 38). Si l'on prend sur cette courbe un point fixe O comme origine des arcs et un sens

positif OS, la position M du mobile, à chaque instant t, sera déterminée par la valeur algébrique s du segment curviligne $\overline{OM}$; ce segment s a donc une valeur pour chaque valeur numérique positive, négative ou nulle du temps t. On peut dire que s est une certaine fonction du temps

$$s = \varphi(t).$$

Cette relation entre s et t s'appelle l'*équation du mouvement sur la courbe.*

C'est ainsi que l'on peut définir la position d'un train sur une ligne de chemin de fer: la voie constitue la trajectoire; l'horaire du train donne la distance kilométrique du train à la gare de départ à chaque instant.

Quand la trajectoire est une droite, on dit que le mouvement est rectiligne; quand elle est une courbe, le mouvement du point est curviligne; en particulier, quand la trajectoire est une circonférence, on dit que le mouvement du point est circulaire.

Il existe, pour un mobile, deux vecteurs intimement liés au mouvement; ces vecteurs sont la *vitesse* et l'*accélération*.

Nous étudierons d'abord la vitesse dans le mouvement rectiligne, puis dans un mouvement curviligne

Nous nous occuperons ensuite de l'accélération

44. Mouvement rectiligne et uniforme. — On dit que le mouvement d'un point est rectiligne quand

la trajectoire est une droite. Le mouvement rectiligne le plus simple est le mouvement uniforme. C'est un mouvement dans lequel *le mobile marche toujours dans le même sens* de telle façon que les *espaces parcourus soient proportionnels aux temps employés à les parcourir.*

Un cycliste suivant une route droite à une allure régulière donne l'image du mouvement rectiligne uniforme. S'il fait, par exemple, 7^m à la seconde, il fera 14^m en 2 secondes, 21^m en 3 secondes, $3^m,50$ en une demi-seconde, etc.

Équation du mouvement. — Prenons (*fig.* 39), sur la droite que décrit le mobile, un point O comme origine des espaces et un sens positif Ox.

Fig. 39.



Pour trouver l'*équation du mouvement,* il faut trouver la relation qui lie l'abscisse du mobile M au temps.

Soient x_0 l'abscisse du mobile à l'origine des temps $t = 0$, x son abscisse à l'instant t : le rapport

$$\frac{x - x_0}{t}$$

est, en valeur absolue, égal au rapport du chemin parcouru au temps employé à le parcourir; ce rapport a donc une valeur absolue constante. Nous allons voir, en outre, que le signe de ce rapport est

constant et que ce signe indique le sens dans lequel se meut le mobile.

1° Le mobile se meut dans le sens positif de Ox; alors, quand le temps croît, x croît également; si donc t est positif, $x - x_0$ l'est aussi et le rapport est positif; si t est négatif, $x - x_0$ l'est aussi et le rapport est encore positif; on a donc dans ce cas

$$\frac{x - x_0}{t} = k,$$

k désignant une *constante positive*.

2° Le mobile se meut dans le sens négatif de Ox. Alors, quand le temps croît, x décroît; si donc t est positif, $x - x_0$ est négatif et inversement; le rapport est donc négatif et l'on a

$$\frac{x - x_0}{t} = k,$$

k désignant une *constante négative*.

En résumé, l'équation du mouvement uniforme est dans tous les cas

$$x = x_0 + kt.$$

Réciproquement, tout mouvement défini par une equation du premier degré entre x et t de la forme ci-dessus est uniforme : en effet, le mouvement défini par

$$x = x_0 + kt$$

possède, quels que soient x_0 et k, les deux propriétés qui caractérisent le mouvement uniforme. D'abord, le mobile marche toujours dans le même sens, car, t croissant, x augmente quand k est positif et diminue quand k est négatif; ensuite les espaces parcourus sont proportionnels aux temps employés à les parcourir, car, en appelant Δx la variation subie par l'abscisse quand t croît de Δt, on a

$$x = x_0 + kt, \qquad x + \Delta x = x_0 + k(t + \Delta t),$$
$$\Delta x = k\,\Delta t, \qquad \frac{\Delta x}{\Delta t} = k,$$

ce qui démontre la deuxième propriété.

Vitesse; sa représentation par un vecteur. — Soit M la position du mobile à l'instant t, M_1 sa position à l'instant postérieur $t + \Delta t$, Δt étant positif; la grandeur géométrique MM_1 a pour valeur algébrique, estimée suivant l'axe Ox, Δx. Si dans le sens MM_1 on porte, à partir de M, une longueur MV égale à $\frac{MM_1}{\Delta t}$, *la grandeur géométrique* MV (*fig.* 39) est la *vitesse du mouvement uniforme.*

On appelle *valeur algébrique* v de cette vitesse la longueur du segment vitesse MV, précédée du signe + ou du signe —, suivant que ce segment est dirigé dans le sens positif ou le sens négatif de l'axe. On a alors, en grandeur et en signe,

$$v = \frac{\Delta x}{\Delta t},$$

car la valeur absolue de MM_1 est égale à celle de Δx et le signe de v est le même que celui de Δx.

D'après l'équation du mouvement, la vitesse du mouvement rectiligne uniforme est constante en grandeur, direction et sens, car on a, quels que soient t et Δt,

$$\Delta x = k\,\Delta t, \qquad v = \frac{\Delta x}{\Delta t} = k.$$

Si $\Delta t = 1$, on voit que $v = \Delta x$; on peut donc dire que *la vitesse dans un mouvement rectiligne uniforme est, en grandeur, direction et sens, l'espace parcouru dans l'unité de temps.*

Signification physique des constantes. — La constante x_0 représente l'abscisse du mobile à l'origine des temps. La constante k est la vitesse v du mobile. On peut donc écrire l'équation générale du mouvement uniforme

$$x = x_0 + vt,$$

où la signification des constantes est en évidence.

En particulier, si l'on convient de prendre pour origine des espaces la position du mobile à l'instant $t = 0$, x_0 est nul et l'équation du mouvement prend la forme simple

$$x = vt.$$

Choix des unités. — Les espaces parcourus sont

mesurés à l'aide d'une certaine unité de longueur qui peut être, suivant les cas, le centimètre, le mètre, le kilomètre ; x et, par suite, Δx sont donc des nombres algébriques dont la valeur absolue exprime des centimètres, des mètres ou des kilomètres.

De même, les temps t et Δt sont mesurés à l'aide d'une certaine unité qui peut être, suivant les cas, la seconde, la minute, l'heure, le jour ou même l'année.

La vitesse v du mouvement est un nombre algébrique dont la valeur absolue dépend du choix des unités de longueur et de temps. Quand on énonce un nombre représentant la valeur absolue d'une vitesse, il faut dire quelles sont les unités adoptées. Par exemple, si l'on prend comme unité de longueur le mètre et comme unité de temps la seconde, on dit que le mobile a une vitesse de tant de mètres à la seconde. Ainsi le cycliste dont nous parlons au commencement de ce numéro (page 76), possède une vitesse de 7^{m} *à la seconde;* dans le système d'unités (mètre, seconde), cette vitesse est exprimée par le nombre 7. On pourrait dire aussi que ce cycliste a une vitesse de 420^{m} à la minute, ou de $25^{km},200$ à l'heure.

45. Mouvement rectiligne varié. — Tout mouvement qui n'est pas uniforme est dit *varié*. Imaginons un mobile M décrivant une droite Ox d'un mouvement non uniforme (*fig.* 40). Soit M la posi-

Fig. 40.



tion du mobile à l'instant t, $x = \overline{\text{OM}}$ l'abscisse du mobile à cet instant; x est une certaine fonction du temps

$$x = \varphi(t)$$

définissant le mouvement.

Soient M_1 la position du mobile à l'instant postérieur $t + \Delta t$, $\Delta t > 0$, et $x + \Delta x$ l'abscisse du point M_1; le déplacement MM_1 que subit le mobile quand t croît de Δt est un segment dont la valeur algébrique est Δx.

Vitesse. — Si dans le sens MM_1 (*fig.* 40) on porte une longueur MW égale à $\frac{MM_1}{\Delta t}$, le vecteur MW, dont la valeur algébrique est $\frac{\Delta x}{\Delta t}$, s'appelle *vitesse moyenne* du mobile dans l'intervalle de temps Δt. C'est la vitesse que posséderait un mobile fictif animé d'un mouvement uniforme et allant de M en M_1 pendant le même temps Δt. Si Δt tend vers zéro, le vecteur MW tend vers un vecteur limite MV dont l'expression algébrique v est la dérivée x'_t ou $\frac{dx}{dt}$ ou $\varphi'(t)$, que l'on appelle *vitesse* du mobile *à l'instant t*.

Exemple. — Il est évident que dans un mouvement uniforme

$$x = x_0 + kt$$

nous devons, en appliquant la règle générale, retrouver pour la valeur algébrique de la vitesse à un

instant le nombre k que nous avons appelé *vitesse* de ce mouvement. On a, en effet, en prenant la dérivée de x par rapport à t,

$$v = x'_t = \frac{dx}{dt} = k.$$

Réciproquement, nous pouvons maintenant démontrer que, si dans un mouvement rectiligne la vitesse à chaque instant est constante, ce mouvement est uniforme. En effet, la vitesse étant égale à une constante k, la dérivée de x par rapport à t est égale à k,

$$\frac{dx}{dt} = k,$$

d'où, en remontant à la fonction primitive,

$$x = x_0 + kt,$$

x_0 désignant une constante. Le mouvement est donc uniforme.

46. Mouvement sur une trajectoire curviligne.

Vitesse. — Soit S′S la trajectoire d'un mobile, soient M et M_1 les positions du mobile sur cette trajectoire aux instants t et $t + \Delta t$. Portons sur MM_1, dans le sens MM_1, une longueur MW égale à $\frac{\text{corde } MM_1}{\Delta t}$ (*fig.* 38); le vecteur MW s'appelle *vitesse moyenne* du mobile pendant le temps Δt; c'est la vitesse que

posséderait un mobile fictif animé d'un mouvement rectiligne uniforme qui parcourrait le segment de droite MM_1 dans le temps Δt. Lorsque Δt tend vers zéro, la vitesse moyenne MW tend vers un vecteur limite MV, tangent à la trajectoire en M, que l'on appelle *vitesse du mobile à l'instant t*, et qui représente cette vitesse en grandeur, direction et sens.

Prenons sur la trajectoire (*fig.* 38) un point fixe O comme origine des arcs et un sens positif S'S; on pourra définir, à chaque instant t, la position M du mobile en se donnant en fonction de t la valeur algébrique s du segment curviligne $\overline{OM}$,

$$s = \overline{OM} = \varphi(t).$$

Si t prend un accroissement positif Δt, le mobile se déplace de M en M_1 et la valeur algébrique du segment curviligne MM_1 représentant le déplacement du mobile est Δs.

Par définition la grandeur du vecteur vitesse est

$$MV = \lim \frac{\text{corde}\, MM_1}{\Delta t},$$

quand Δt tend vers zéro. On peut écrire le rapport précédent

$$\frac{\text{corde}\, MM_1}{\text{arc}\, MM_1} \cdot \frac{\text{arc}\, MM_1}{\Delta t}.$$

Or, dans une courbe quelconque, le rapport de la corde à l'arc tend vers l'unité quand l'arc tend vers

zéro; en écrivant

$$\mathrm{MV} = \lim \frac{\mathrm{corde\,MM_1}}{\mathrm{arc\,MM_1}} \cdot \lim \frac{\mathrm{arc\,MM_1}}{\Delta t},$$

on a donc, puisque la première limite est 1,

$$\mathrm{MV} = \lim \frac{\mathrm{arc\,MM_1}}{\Delta t}.$$

D'après cela, la vitesse du mobile M à l'instant t est un *vecteur* caractérisé par les éléments suivants :

1° *Point d'application :* la position du mobile M à l'instant t;

2° *Direction :* la tangente à la trajectoire;

3° *Sens :* le sens du mouvement;

4° *Grandeur :* la valeur absolue de $\lim \frac{\mathrm{arc\,MM_1}}{\Delta t}$, c'est-à-dire de la limite du rapport du chemin parcouru au temps employé à le parcourir quand ce temps tend vers zéro.

Valeur algébrique de la vitesse. — Menons à la courbe en M (*fig.* 38) la tangente MT *dans le sens positif des arcs* et convenons d'appeler *valeur algébrique de la vitesse* la grandeur MV de la vitesse précédée du signe + ou du signe —, suivant que le vecteur vitesse MV est dirigé dans le sens MT ou en sens contraire, ou, ce qui revient au même, suivant que, à l'instant t, le mobile marche dans le sens positif ou le sens négatif des arcs. Nous allons mon-

trer que *la valeur algébrique* v *de la vitesse est égale à la dérivée de* s *par rapport à* t

$$v = \frac{ds}{dt} = s'_t.$$

En effet, si le mobile, en M, marche dans le sens positif, l'accroissement Δs du segment curviligne $\mathrm{OM} = s$ est positif et l'on a, pour la longueur de l'arc parcouru MM_1 pendant le temps Δt,

$$\operatorname{arc} \mathrm{MM}_1 = \Delta s;$$

la grandeur de la vitesse en M est alors

$$\mathrm{MV} = \lim \frac{\Delta s}{\Delta t} = \frac{ds}{dt} = s'_t;$$

comme cette vitesse est dirigée dans le sens MT, sa valeur algébrique v est positive, et l'on a

$$v = + \mathrm{MV} = \frac{ds}{dt} = s'_t.$$

Si, au contraire, le mobile marche dans le sens négatif, Δs est négatif, et l'on a, pour la longueur de l'arc MM_1,

$$\operatorname{arc} \mathrm{MM}_1 = - \Delta s;$$

la grandeur de la vitesse est alors

$$\mathrm{MV} = \lim \frac{-\Delta s}{\Delta t} = - \frac{ds}{dt} = - s'_t;$$

comme cette vitesse est dirigée en sens opposé de MT,

sa valeur algébrique v est négative, et l'on a

$$v = - \mathrm{MV} = \frac{ds}{dt} = s'_t.$$

Donc, dans les deux cas, v est la dérivée de s par rapport à t.

On peut aussi se rendre compte de ce résultat en remarquant d'abord que v et $\frac{ds}{dt}$ ont *la même valeur absolue,* d'après la définition même de la grandeur de la vitesse; on voit ensuite que ces deux quantités ont *le même signe;* car, si le mobile marche dans le sens positif, v est positif, s croît avec t, donc $\frac{ds}{dt}$ est aussi positif; si le mobile marche dans le sens négatif, v est négatif, s décroît quand t augmente, donc sa dérivée $\frac{ds}{dt}$ est également négative.

Unités. — D'après la remarque que nous avons faite sur le choix des unités à la fin du n° **44**, la valeur absolue de v représentera des mètres à la seconde, ou des kilomètres à l'heure, etc., suivant le choix des unités de longueur et de temps.

47. Exemples.

1° **Mouvement curviligne uniforme.** — On dit qu'un mouvement curviligne est uniforme lorsque le mobile marche toujours sur sa trajectoire *dans le*

même sens, de telle façon que les *arcs de trajectoire parcourus soient proportionnels aux temps employés à les parcourir.* On voit que cette définition est l'extension à un mouvement curviligne de la définition donnée pour un mouvement rectiligne uniforme. On a alors, d'après les raisonnements employés au n° **44**, en appelant s_0 le segment curviligne OM_0 aboutissant à la position du mobile à l'instant initial $t = 0$,

$$s = s_0 + kt.$$

Dans ce cas, la *valeur algébrique* v de la vitesse est

$$v = \frac{ds}{dt} = s'_t = k,$$

elle est constante.

Réciproquement, si un mobile parcourt une courbe avec une vitesse dont la valeur algébrique est constante, le mouvement est uniforme. En effet, si $v = k$, on a

$$\frac{ds}{dt} = k,$$

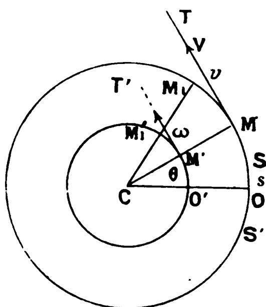
$$s = kt + s_0.$$

Le fait que la valeur algébrique de la vitesse est constante caractérise donc le mouvement uniforme sur une courbe; mais il faut remarquer que, dans le mouvement *curviligne* uniforme, le vecteur vitesse n'est pas constant, car sa direction change à chaque instant.

C'est seulement dans le cas du mouvement *rectiligne* uniforme que le vecteur vitesse est constant en grandeur, direction et sens (49).

On a un exemple grossier de mouvement curviligne uniforme en prenant un train de chemin de fer en marche régulière entre deux stations : le mouvement du train est sensiblement uniforme, la valeur algébrique v de la vitesse du train est *constante;* si le train marche dans le sens choisi comme positif sur la voie, v est une constante positive; dans le cas contraire, v est une constante négative. La vitesse est alors exprimée en kilomètres à l'heure; elle peut dépasser, pour les trains rapides, 80^{km} à l'heure.

Fig. 41.



2° Mouvement circulaire quelconque; vitesse angulaire à un instant. — Soit (*fig.* 41) un mobile M décrivant, suivant une loi quelconque, une circonférence fixe de rayon R et de centre C. Prenons un point fixe O de la circonférence comme origine des arcs, et faisons choix d'un sens positif OS pour les arcs, le sens opposé OS' étant négatif : sur la figure nous adoptons comme sens positif celui de la Trigono-

métrie. Soient s le segment curviligne $\overline{OM}$, MT la tangente à la circonférence dans le sens des arcs positifs. Si le point M se déplace, s est une certaine fonction de t, et, dans la position M, la valeur algébrique v du vecteur vitesse MV est

$$v = \frac{ds}{dt} = s'_t.$$

Dans le cas de la figure 41, v serait positif, car MV est dirigé dans le sens MT.

Vitesse angulaire à un instant. — Décrivons, de C comme centre, *avec l'unité de longueur* comme rayon, une circonférence auxiliaire; soient O′, M′ les points où les rayons CO, CM rencontrent cette circonférence; appelons θ le segment curviligne $\overline{O'M'}$ compté positivement autour du point C dans le même sens que $\overline{OM}$. L'arc $\theta = \overline{O'M'}$ ainsi défini mesure l'angle au centre OCM suivant la méthode adoptée en Trigonométrie. Pendant que le point M se meut sur sa circonférence, le point M′ se meut sur la circonférence auxiliaire : la valeur algébrique ω de la vitesse de M′ s'appelle *vitesse angulaire* du mobile M ou aussi *vitesse angulaire* du rayon OM; on a donc

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = \theta'_t,$$

puisque l'arc $\overline{O'M'}$ est θ.

Comme les arcs OM et O′M′ sont décrits dans le

même sens de rotation et sont proportionnels aux rayons $CO = R$ et $CO' = 1$, on a

$$\frac{s}{\theta} = \frac{R}{1}, \qquad s = R\theta.$$

En prenant les dérivées des deux membres par rapport à t, on a, entre la valeur algébrique v de la vitesse de M et la valeur algébrique ω de sa vitesse angulaire, au même instant, la relation

$$v = R\omega.$$

Cette formule est d'ailleurs évidente : si, pendant le temps Δt, M vient en M_1, M' vient en M'_1, les deux arcs MM_1 et $M'M'_1$ sont parcourus dans le même sens, et l'on a, en écrivant que ces arcs sont proportionnels aux rayons des deux circonférences,

$$\text{arc}\,\overline{MM_1} = R\,\text{arc}\,\overline{M'M'_1};$$

divisant par Δt et supposant que Δt tende vers zéro, on a

$$\lim \frac{\text{arc}\,MM_1}{\Delta t} = R \lim \frac{\text{arc}\,M'M'_1}{\Delta t}$$

ou

$$v = R\omega.$$

On appelle quelquefois la vitesse v la *vitesse linéaire* du mobile, par opposition avec le nom de *vitesse angulaire* donné à ω.

3° **Mouvement circulaire uniforme.** — Imaginons

en particulier un mobile M décrivant un cercle *d'un mouvement uniforme.*

La valeur algébrique v de la vitesse est alors constante; il en est de même de la vitesse angulaire ω. Dans ce cas, l'arc parcouru par le mobile étant proportionnel au temps employé à le parcourir, la grandeur de la vitesse est le rapport du chemin parcouru au temps correspondant.

Soit, par exemple, T la durée d'une révolution complète du mobile; la longueur parcourue pendant le temps T est la circonférence $2\pi R$; la valeur absolue de la vitesse est donc

$$\frac{2\pi R}{T};$$

de même la vitesse angulaire est le rapport de l'arc parcouru par le point M' sur la circonférence de rayon 1 au temps correspondant, elle est donc

$$\frac{2\pi}{T}.$$

Dans ce cas, on a par suite

$$v = \pm \frac{2\pi R}{T}, \qquad \omega = \pm \frac{2\pi}{T},$$

où il faut prendre + ou — suivant le sens de la rotation.

Dans la plupart des applications on prend, comme sens positif des arcs, le sens même du mouvement

uniforme; alors v et ω sont positifs, et l'on a pour la vitesse angulaire

$$\omega = \frac{2\pi}{T},$$

et pour la vitesse linéaire du mobile

$$v = R\omega = \frac{2\pi R}{T}.$$

Suivant que l'unité de temps est la seconde ou la minute, on dit que ω est la vitesse angulaire à la seconde ou à la minute.

Exemple. — La pointe d'une aiguille d'une montre ou d'une horloge est animée, par rapport au cadran, d'un mouvement circulaire qui est sensiblement uniforme, quoiqu'en réalité il se fasse par petites saccades. La petite aiguille faisant un tour en 12 heures, c'est-à-dire en 12.60^2 secondes, sa vitesse angulaire à la seconde est

$$\omega = \frac{2\pi}{12.60^2};$$

si r désigne la longueur de la petite aiguille, la vitesse linéaire de la pointe a pour grandeur

$$v = \frac{2\pi r}{12.60^2}.$$

La grande aiguille faisant un tour en 1 heure et ayant une longueur R, sa vitesse angulaire à la se-

conde est

$$\Omega = \frac{2\pi}{60^2} = 12\,\omega,$$

et la vitesse linéaire de l'extrémité a pour grandeur

$$V = \frac{2\pi R}{60^2} = 12\,\frac{R}{r}\,v.$$

48. Propriété caractéristique du mouvement rectiligne. — *Pour qu'un mouvement soit rectiligne, il faut et il suffit que la vitesse ait une direction constante.*

En effet, si le mouvement est rectiligne, la vitesse a une direction constante; réciproquement, si la vitesse a une direction constante, le mouvement est rectiligne, car la trajectoire doit alors être telle que sa tangente ait partout la même direction, ce qui n'a lieu que pour une ligne droite.

49. Propriété caractéristique du mouvement rectiligne uniforme. — *Pour qu'un mouvement soit rectiligne et uniforme, il faut et il suffit que la vitesse soit constante en grandeur, direction et sens.*

Tout d'abord, la condition est remplie pour tout mouvement rectiligne et uniforme; réciproquement, si elle est remplie pour un certain mouvement, ce mouvement est d'abord *rectiligne,* car la vitesse a

une direction fixe; ensuite ce mouvement rectiligne est uniforme, car sa vitesse est constante en grandeur et sens (n° 45).

50. Exercices.

1° **Problème des courriers sur une courbe non fermée.** — Étant donnée une ligne indéfinie non fermée, comme une ligne droite, on imagine deux mobiles se trouvant à l'instant $t = 0$ en deux points donnés de la courbe et décrivant chacun la courbe d'un mouvement uniforme de vitesse donnée; on demande si les mobiles se rencontrent, où et quand ils se rencontrent. Si l'on prend une origine O sur la courbe et un sens positif OS pour les arcs (*fig.* 38), la position du premier mobile M au temps t est définie par une équation de la forme

$$s = a + vt, \tag{1}$$

où a est la valeur connue de s à l'instant initial $t = 0$, et où v est une constante donnée, positive ou négative, égale à la valeur algébrique de la vitesse du premier mobile.

De même la position du deuxième mobile M_1 au temps t est définie par une relation de la forme

$$s_1 = a_1 + v_1 t. \tag{2}$$

Pour que les mobiles se rencontrent, il faut et il

suffit que, pour une certaine valeur de t, on ait

$$s = s_1,$$

c'est-à-dire

$$a + vt = a_1 + v_1 t.$$

On en déduit, pour l'instant de la rencontre,

$$(3) \qquad (v - v_1)t = a_1 - a.$$

Si v est différent de v_1, cette équation donne t

$$t = \frac{a_1 - a}{v - v_1};$$

on a ensuite, pour la position du point de rencontre,

$$s = s_1 = \frac{va_1 - av_1}{v - v_1}.$$

Lorsque la valeur trouvée pour t est positive, la rencontre a lieu *après* l'instant initial; lorsqu'elle est négative, elle a lieu *avant*.

Si les deux mobiles avaient la même vitesse $v = v_1$ et partaient à l'instant $t = 0$ de points différents, $a \neq a_1$, l'équation (3) ne pourrait être vérifiée par aucune valeur de t, car le premier membre serait toujours nul et le deuxième ne l'est pas. Le problème n'a pas de solution, comme il est évident *a priori*.

Enfin si l'on avait

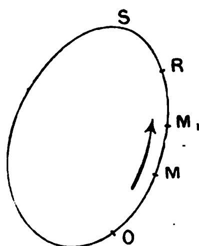
$$v = v_1, \qquad a = a_1,$$

l'équation (3) serait vérifiée quel que soit t, car les deux membres seraient toujours nuls; les mobiles

partent alors du même point, avec la même vitesse; ils sont évidemment toujours en contact et le problème est indéterminé.

2° Problème des courriers sur une courbe fermée. — Soient deux mobiles M et M_1 parcourant une courbe fermée, comme une circonférence, une ellipse, etc., d'un mouvement uniforme. Prenons (*fig.* 42) une origine O sur la courbe et un sens positif des arcs OS marqué par une flèche. Les équations des deux mouvements sont encore

Fig. 42.



$$s = a + vt,$$
$$s_1 = a_1 + v_1 t.$$

Mais, pour que les mobiles se trouvent, au même instant, au même point de la courbe, il n'est plus nécessaire que $s = s_1$; il suffit que la différence $s - s_1$ des arcs soit égale à un nombre entier de fois k la longueur totale L de la courbe fermée

$$(4) \qquad s - s_1 = kL.$$

En effet, il est évident que, si l'on porte, à partir du point O, sur la courbe, dans un sens ou dans l'autre, des segments curvilignes différant de L, 2L, 3L, ..., on trouve le même point de la courbe après avoir fait 1, 2, 3, ... tours sur la courbe. On obtiendra donc les époques des rencontres en écrivant l'équa-

tion (4) où k est un entier quelconque positif, négatif ou nul. On a ainsi

$$(v - v_1)t + a - a_1 = kL;$$

en faisant successivement

$$k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$

on a les époques des rencontres successives. Nous appellerons t_k les valeurs correspondantes de t, t_0, $t_{\pm 1}$, $t_{\pm 2}$, ...

Supposons, pour fixer les idées, que l'on ait appelé v la plus grande vitesse de façon que $v - v_1$ soit positif; on aura une rencontre à l'époque

$$t_0 = \frac{a_1 - a}{v - v_1}$$

correspondant à $k = 0$. Après celle-là, il y en aura une nouvelle à l'époque

$$t_1 = \frac{a_1 - a}{v - v_1} + \frac{L}{v - v_1} = t_0 + \frac{L}{v - v_1}$$

correspondant à $k = 1$, puis une nouvelle à l'instant

$$t_2 = \frac{a_1 - a}{v - v_1} + \frac{2L}{v - v_1} = t_0 + \frac{2L}{v - v_1}$$

correspondant à $k = 2$, ...

De même avant l'époque t_0, il y a eu d'autres rencontres à des époques t_{-1}, t_{-2}, ... correspondant à $k = -1$, $k = -2$, ... Les rencontres se suc-

cèdent à des intervalles de temps réguliers égaux à

$$(5) \qquad \tau = \frac{L}{v - v_1};$$

on a, en effet,

$$t_1 = t_0 + \tau, \qquad t_2 = t_0 + 2\tau, \qquad \ldots.$$

L'intervalle de temps τ s'exprime d'une manière simple à l'aide des durées des révolutions T et T_1 des deux mobiles. Deux cas sont à distinguer suivant que les mobiles marchent dans le même sens ou en sens contraires.

Si les mobiles marchent dans le même sens, on peut prendre ce sens comme sens positif; alors

$$v = \frac{L}{T}, \qquad v_1 = \frac{L}{T_1}$$

et la relation (5) peut s'écrire

$$(6) \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T} - \frac{1}{T_1}.$$

Si les mobiles tournent en sens contraires, le premier tournera dans le sens positif, le deuxième dans le sens négatif; alors

$$v = \frac{L}{T}, \qquad v_1 = -\frac{L}{T_1},$$

et la relation (5) donne

$$(7) \qquad \frac{1}{\tau} = \frac{1}{T} + \frac{1}{T_1}.$$

Par exemple, les deux aiguilles d'une montre tournent dans le même sens, l'une en 1 heure, l'autre en 12 heures; cherchons l'intervalle de temps qui sépare deux superpositions des aiguilles : il suffira d'imaginer un point sur chaque aiguille à l'unité de distance du centre du cadran et de chercher l'espace de temps qui s'écoule entre deux rencontres successives de ces deux points. On a ainsi, *en prenant l'heure comme unité,*

$$\frac{1}{\tau} = \frac{1}{1} - \frac{1}{12},$$

$$\tau = \frac{12}{11} = 1 \text{ heure} + \frac{1}{11}.$$

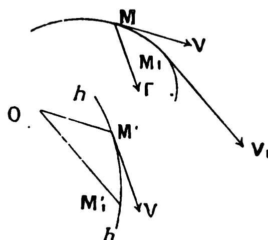
Ainsi, la première rencontre ayant lieu à midi, les autres ont lieu à $1^h + \frac{1}{11}$, $2^h + \frac{2}{11}$, ...

51. Accélération; hodographe. — Dans un mouvement varié, le vecteur vitesse ne reste pas le même, car sa grandeur ou sa direction, ou à la fois sa grandeur et sa direction changent d'un instant à l'autre. Pour mesurer la rapidité avec laquelle le vecteur vitesse varie, on introduit un nouveau vecteur qu'on nomme le *vecteur accélération* ou, plus simplement, l'*accélération*.

Imaginons un mobile M qui parcourt une certaine courbe. Soit M sa position à l'instant t, MV le vecteur vitesse (*fig.* 43) : pour nous rendre compte de la façon dont ce vecteur varie avec t, prenons un

point fixe arbitraire O′ (*fig.* 43) et menons par ce point un vecteur O′M′ égal et parallèle au vecteur vitesse MV. Si la vitesse du mobile M ne changeait ni en grandeur, ni en direction, le point M′ resterait immobile. Mais t variant, le vecteur MV change; le point M′, extrémité du vecteur O′M′, se déplace en parcourant, suivant une certaine loi, une ligne h qu'on appelle *hodographe* du mouvement du point M. Ainsi, à un autre instant $t + \Delta t$, le mobile M est en M_1, sa vitesse est le nouveau vecteur M_1V_1; en menant $O'M'_1$ égal et parallèle à M_1V_1, on a le point M'_1 de l'hodographe correspondant à la nouvelle position M_1 du mobile.

Fig. 43.



A chaque instant le mobile auxiliaire M′ ainsi défini a une vitesse qui est un certain vecteur M′V′ tangent à l'hodographe : *par définition, l'accélération du point* M *à cet instant est un vecteur* MΓ, *ayant son origine en* M, *égal et parallèle à* M′V′.

En résumé, l'accélération du mobile M est, à chaque instant t, un vecteur MΓ appliqué au point M, égal en grandeur, direction et sens, au vecteur vitesse M′V′ du point correspondant M′ sur l'hodographe.

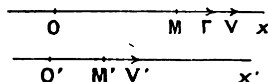
On peut dire, sous forme abrégée, que l'accélé-

ration est égale à la vitesse avec laquelle varie le vecteur vitesse.

Appliquons maintenant cette définition générale à quelques cas simples, entre autres au mouvement rectiligne et au mouvement circulaire uniforme.

52. Hodographe et accélération d'un mouvement rectiligne varié. — Soit un mobile M parcourant l'axe Ox d'un mouvement varié et possédant à l'instant t la vitesse représentée par le vecteur MV (*fig.* 44); pour tracer l'hodographe de ce mouvement, prenons une origine fixe O′ et menons, à partir de cette origine, un segment O′M′ égal et parallèle à MV. Quand t varie, la vitesse du mobile M change de grandeur, mais non de direction; les points M′, que l'on obtient par la construction de l'hodographe, se trouvent donc tous sur la droite $O'x'$ parallèle à Ox, et l'hodographe est la droite $O'x'$.

Fig. 44.



Si la vitesse du point M était constante, le point M′ de l'hodographe serait immobile; la vitesse du point M étant variable avec t, le point M′ se déplace lui-même avec une vitesse M′ V′ qui est égale à l'accélération M Γ du point M.

Valeur algébrique du vecteur accélération dans un mouvement rectiligne. — Sur l'axe $O'x'$ l'ab-

scisse x' du point M' est par construction égale à la vitesse v du point M : $x' = v$. La valeur algébrique γ de la vitesse M'V' de ce point est donc

$$\gamma = \frac{dx'}{dt} = \frac{dv}{dt}.$$

Ce même nombre γ exprime donc la valeur algébrique de l'accélération $\overline{M\Gamma}$ du mobile M sur l'axe Ox.

On a encore, comme v est la dérivée première de x par rapport à t,

$$\gamma = x''_t = \frac{d^2 x}{dt^2}.$$

En résumé, l'accélération est, comme la vitesse, un vecteur MΓ dont la valeur algébrique γ est la dérivée de v par rapport à t, c'est-à-dire la dérivée deuxième de x par rapport à t. L'accélération est dirigée dans le sens positif ou le sens négatif suivant que sa valeur algébrique γ est positive ou négative.

Exemple. — Dans un mouvement rectiligne et uniforme le vecteur vitesse est constant en grandeur et direction, $v =$ const.; l'accélération est donc nulle. Réciproquement, si un mouvement rectiligne est tel que son accélération soit constamment nulle, il est uniforme. En effet, dans cette hypothèse, on aurait

$$\frac{dv}{dt} = 0;$$

donc v serait constante et le mouvement uniforme.

Mouvement rectiligne accéléré ou retardé. — On dit qu'un mouvement est accéléré quand sa vitesse croît en valeur absolue; il est retardé quand sa vitesse décroît en valeur absolue. En d'autres termes, le mouvement est accéléré ou retardé suivant que le carré v^2 augmente ou diminue.

Donc un mouvement rectiligne est *accéléré* quand la dérivée

$$\frac{d(v^2)}{dt} = 2v\frac{dv}{dt} = 2v\gamma$$

est *positive*; il est *retardé* quand cette même quantité est *négative*. On peut dire aussi que le mouvement est accéléré quand v et γ ont le même signe, c'est-à-dire quand les vecteurs vitesse et accélération ont le même sens; il est retardé dans le cas contraire.

53. Mouvement rectiligne uniformément varié. — Nous avons vu plus haut que le mouvement rectiligne uniforme est caractérisé par ce fait que son accélération est *nulle*. Le mouvement rectiligne qui se présente comme le plus simple, après le mouvement uniforme, est alors un mouvement dans lequel l'accélération aurait une valeur *constante* différente de *zéro*. Un tel mouvement est dit *uniformément varié*.

Équation du mouvement. — Soit γ la valeur *constante* de l'accélération; on aura, en appelant v la

valeur algébrique de la vitesse,

$$\frac{dv}{dt} = \gamma,$$

d'où, en prenant la fonction primitive,

$$(1) \qquad v = v_0 + \gamma t,$$

v_0 désignant la vitesse du mobile à l'instant $t = 0$. Mais $v = \frac{dx}{dt}$; on a donc

$$\frac{dx}{dt} = v_0 + \gamma t,$$

d'où, en prenant la fonction primitive et remarquant que v_0 et γ sont constants,

$$(2) \qquad x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2,$$

x_0 étant une constante qui représente la valeur de x pour $t = 0$, c'est-à-dire l'abscisse du mobile à l'origine du temps. Cette équation (2) est l'équation du mouvement rectiligne *uniformément varié*.

On voit que, dans l'équation du mouvement, x est une fonction du deuxième degré en t. Inversement, toutes les fois que x est une fonction du deuxième degré en t

$$x = a + bt + ct^2,$$

le mouvement est uniformément varié, car, en pre-

nant la dérivée première, on a la vitesse

$$v = b + 2ct,$$

et en prenant encore une fois la dérivée on a l'accélération

$$\gamma = 2c$$

qui est constante

Théorème. — *Dans un mouvement rectiligne uniformément varié, la variation Δv de la vitesse pendant un intervalle Δt est proportionnelle à Δt et le rapport $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ est égal à l'accélération constante γ du mouvement.*

En effet, l'équation (1) donne immédiatement, si l'on fait croître t de Δt et v de Δv,

$$\frac{\Delta v}{\Delta t} = \gamma;$$

inversement, si, dans un mouvement rectiligne, la vitesse varie proportionnellement au temps, le mouvement est uniformément varié; en effet, par hypothèse, $\frac{\Delta v}{\Delta t}$ est constant; la limite de ce rapport $\frac{dv}{dt}$, c'est-à-dire l'accélération, est donc constante, ce qui est la définition même du mouvement uniformément varié.

Discussion. — Un mouvement uniformément varié

est à certains instants retardé et, à d'autres, accéléré. Pour le montrer, considérons, suivant la règle générale, le produit

$$v\gamma = (v_0 + \gamma t)\gamma;$$

ce produit s'annule à l'instant

$$t_1 = -\frac{v_0}{\gamma},$$

où la vitesse s'annule. Il est négatif quand $t < t_1$ et positif quand $t > t_1$; le mouvement est retardé pour $t < t_1$ et accéléré pour $t > t_1$.

Pour discuter complètement le mouvement, on est ramené à discuter la variation d'un trinome du deuxième degré. Supposons, pour fixer les idées, $\gamma > 0$ et reprenons les équations

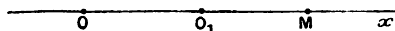
$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2,$$
$$v = \frac{dx}{dt} = v_0 + \gamma t;$$

la variable indépendante t va toujours en croissant, la vitesse s'annule à l'instant $t_1 = -\frac{v_0}{\gamma}$; tant que $t < t_1$ la vitesse est négative, x va en décroissant, le mobile M marche dans le sens négatif; pour $t > t_1$, la vitesse est positive, x croît et le mobile marche dans le sens positif. A l'instant $t = t_1$, x prend sa valeur minimum

$$x_1 = x_0 - \frac{v_0^2}{2\gamma}$$

et le mobile occupe une position O_1, qui est la plus à gauche de toutes les positions qu'il peut prendre (*fig.* 45). En résumé, quand γ est positif, t variant de $-\infty$ à $+\infty$, le mobile vient de l'infini à droite usqu'au point O_1, qu'il atteint pour $t = t_1$, puis retourne de O_1 à l'infini à droite; dans la première phase, le mouvement est retardé; dans la deuxième, il est accéléré.

Fig. 45.



Si l'on prend un point déterminé M d'abscisse x plus grande que x_1, le mobile passe deux fois en M, une fois en marchant vers O_1, et une fois en s'éloignant; il est à remarquer que les deux vitesses correspondantes sont égales et de signes contraires. C'est ce que l'on voit immédiatement en exprimant v en fonction de x. En élevant l'expression de v au carré, on peut écrire

$$v^2 = v_0^2 + 2\gamma\left(v_0 t + \frac{1}{2}\gamma t^2\right),$$

c'est-à-dire, d'après l'expression de x,

$$v^2 = v_0^2 + 2\gamma(x - x_0).$$

Cette formule donne pour v des valeurs réelles, à condition que

$$x > x_0 - \frac{v_0}{2\gamma}, \qquad x > x_1,$$

condition vérifiée; les deux valeurs de v sont d'ailleurs égales et de signes contraires.

Dans cette discussion, nous avons supposé γ positif; on traiterait de même le cas de γ négatif.

Forme réduite de l'équation. — Remarquons, d'une manière générale, que l'on peut toujours chercher à simplifier l'équation d'un mouvement rectiligne en choisissant convenablement l'origine des temps et l'origine des espaces. Actuellement, prenons comme origine des temps l'instant où la vitesse s'annule et comme origine des espaces la position correspondante du mobile. Dans ces conditions, la vitesse v_0, correspondant à $t = 0$, est nulle et l'abscisse correspondante x_0 est nulle. Les équations donnant x et v prennent alors les formes réduites

$$x = \frac{1}{2}\gamma t^2, \qquad v = \gamma t.$$

Avec ce choix d'origines, on a deux formules correspondant à des énoncés très simples qui résument les lois de la chute libre des corps sans vitesse initiale et dans le vide :

1° *Les espaces parcourus sont proportionnels aux carrés des temps employés à les parcourir;*

2° *Les vitesses sont proportionnelles aux temps employés à les acquérir.*

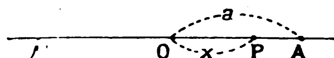
54. Mouvement oscillatoire simple sur une

droite. — Considérons un mouvement rectiligne dont l'équation est

$$x = a \sin(\omega t + \delta),$$

a, ω et δ étant des constantes; c'est un mouvement périodique, puisque le mobile repasse aux mêmes points à des intervalles de temps égaux; en effet, si nous augmentons t de $\frac{2\pi}{\omega}$, l'arc $\omega t + \delta$ augmente de 2π; les sinus de deux arcs qui diffèrent de 2π étant égaux, x reprend la même valeur.

Fig. 46.



Soit O l'origine des espaces (*fig.* 46); prenons comme origine des temps l'instant où le mobile est au point A' d'abscisse $-a$; on aura, pour $t = 0$, $x = -a$; on aura donc

$$-1 = \sin\delta$$

et, par suite, on peut prendre

$$\delta = -\frac{\pi}{2}.$$

L'équation du mouvement s'écrit alors

$$x = a \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) = -a \cos\omega t.$$

Les points A et A' correspondent aux positions extrêmes $+a$ et $-a$ du mobile qui, dans son mouvement vibratoire, oscille autour du point O.

Appelons T le temps d'une *oscillation double ou*

complète, c'est-à-dire le temps que le mobile met à aller de A′ en A et à faire retour en A′; T sera ce qu'on appelle la *période;* elle est caractérisée par ce fait qu'au bout du temps T le mobile reprend et la même position et la même vitesse; on voit d'autre part que x sera nul lorsqu'on aura $t = \frac{T}{4}$ et, par suite,

$$o = -a \cos \omega \frac{T}{4},$$

d'où

$$\omega = \frac{2\pi}{T}$$

et, par suite,

$$x = -a \cos 2\pi \frac{t}{T}.$$

La période T est l'inverse du nombre N des vibrations à la seconde $T = \frac{1}{N}$.

Dans l'étude des mouvements vibratoires, x prend le nom d'*élongation.*

On déduit de l'équation du mouvement, sous cette forme, les expressions de la vitesse et de l'accélération en fonction du temps

$$v = \frac{dx}{dt} = a \frac{2\pi}{T} \sin \frac{2\pi t}{T} \qquad = a\omega \sin \omega t.$$

$$\gamma = \frac{dv}{dx} = a \left(\frac{2\pi}{T}\right)^2 \cos \frac{2\pi t}{T} = a\omega^2 \cos \omega t.$$

a s'appelle l'*amplitude* du mouvement vibratoire. $a\omega$ est la *vitesse maximum* que prend le mobile

au temps $\frac{T}{4}$ du passage au point O; l'arc ωt ou $(\omega t \pm \delta)$ a reçu le nom de *phase de vibration*.

La vitesse et l'accélération sont, comme l'élongation, représentées par des fonctions sinusoïdales du temps; le produit de ces quantités étant alternativement positif et négatif, le mouvement est alternativement accéléré et retardé.

La discussion de ces équations peut se résumer dans le Tableau suivant :

$t = 0,$	$x = -a,$	$v = 0,$	$\gamma = +a\omega^2.$
$t = \frac{T}{4},$	$x = 0,$	$v = +a\omega,$	$\gamma = 0.$
$t = \frac{T}{2},$	$x = +a,$	$v = 0,$	$\gamma = -a\omega^2.$
$t = \frac{3T}{4},$	$x = 0,$	$v = -a\omega,$	$\gamma = 0.$
$t = T,$	$x = -a,$	$v = 0,$	$\gamma = +a\omega^2.$

De T à 2T, x, v et γ repasseraient par les mêmes valeurs, et ainsi de suite.

De A' en O, le mouvement est accéléré; il est retardé de O en A, puisque, la vitesse étant positive, l'accélération est négative; de A en O, le mouvement est accéléré, la vitesse et l'accélération étant à la fois négatives; enfin, de O en A', le mouvement est retardé, la vitesse est dans cet intervalle négative, alors que l'accélération est positive.

On appelle aussi *fréquence* F le nombre N des oscillations complètes à la seconde; c'est, par consé-

quent, l'inverse de la période

$$F = \frac{1}{T} = N.$$

Expressions de la vitesse et de l'accélération en fonction de l'élongation. — Dans le mouvement oscillatoire que nous venons d'étudier, le mobile passe une infinité de fois par une même position M d'abscisse x, comprise entre $-a$ et $+a$. Il y passe toujours avec la même vitesse en valeur absolue. En effet, en éliminant t entre les expressions de x et de v, on a immédiatement

$$\frac{v^2}{\omega^2} + x^2 = a^2, \qquad v = \pm\,\omega\sqrt{a^2 - x^2},$$

d'où, pour chaque valeur de x, deux valeurs de v égales et de signes contraires, l'une correspondant au cas où le mobile passe en M en marchant dans un sens, et l'autre au cas où il passe en M en marchant en sens contraire. Quant à l'accélération, elle est dirigée vers le centre de vibration O et varie proportionnellement à la distance du mobile à ce centre; on a en effet

$$\gamma = -\,\omega^2 x;$$

γ est donc de signe contraire à x et proportionnel à x.

Formule générale. — Si l'on avait pris un cosinus au lieu d'un sinus

$$x = a\cos(\omega t + \delta),$$

on aurait eu un mouvement identique, avec les mêmes conclusions, sauf un changement dans l'origine des temps; on peut en effet écrire cette dernière équation

$$x = a \sin\left[\omega\left(t + \frac{\pi}{2\omega}\right) + \delta\right]$$

ou, en comptant le temps à partir de l'instant $-\frac{\pi}{2\omega}$,

$$x = a \sin(\omega t + \delta).$$

Il est évident qu'un mouvement défini par une équation de la forme

$$x = A \cos \omega t + B \sin \omega t,$$

où A et B sont constants, rentre dans le précédent; car, en déterminant deux constantes a et δ par les équations

$$A = a \cos \delta, \qquad B = -a \sin \delta,$$

on a

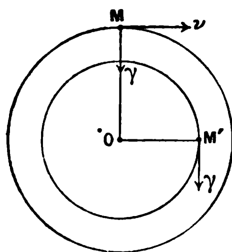
$$x = a \cos(\omega t + \delta).$$

55. Mouvement circulaire uniforme. — Le mobile M décrit la circonférence de rayon R avec une vitesse v constante en grandeur, mais variable en direction; il y a, par conséquent, une accélération. En prenant comme sens positif sur la circonférence le sens du mouvement, nous supposerons $v > 0$.

Appliquons la construction de l'hodographe : soit Mv la vitesse du point M, menons par le point O une droite OM′ parallèle et égale à Mv; le lieu de M′

est évidemment une circonférence de rayon v que le point M′ parcourt dans le même sens et dans le même temps que M emploie à parcourir la circonférence de rayon R (*fig.* 47). L'hodographe est donc une autre circonférence parcourue d'un mouvement uniforme avec la même vitesse angulaire que la première.

Fig. 47.



Le rapport des vitesses v et γ des points M et M′ est le même que celui des rayons R et v; on a donc

$$\frac{\gamma}{v} = \frac{v}{R},$$

d'où

$$\gamma = \frac{v^2}{R}.$$

La vitesse γ du point M′ de l'hodographe est l'accélération du point M se déplaçant d'un mouvement uniforme sur la circonférence; figurons cette vitesse en M′γ et menons par le point M une parallèle Mγ égale et de même sens; ce vecteur figure l'accélération du point M; elle est donc constante en grandeur et dirigée vers le centre de la circonférence suivant le rayon.

Si l'on appelle T la durée d'une *révolution,* c'est-à-dire le temps que le mobile met à parcourir la cir-

conférence, on a, pour les vitesses angulaire et linéaire de M (n° 47),

$$\omega = \frac{2\pi}{T} \quad \text{et} \quad v = \frac{2\pi R}{T};$$

en portant cette valeur de v dans l'expression de γ, il vient

$$\gamma = \frac{4\pi^2 R}{T^2} = \omega^2 R.$$

Cherchons, par exemple, l'accélération de l'extrémité M de la grande aiguille d'une horloge. Soit R le rayon de l'horloge, le point M est alors animé d'un mouvement circulaire uniforme dont la vitesse angulaire à la seconde est

$$\omega = \frac{2\pi}{60^2}.$$

L'accélération MΓ est à chaque instant dirigée vers le centre de l'horloge et égale à

$$\gamma = \omega^2 R = \frac{4\pi^2 R}{60^4}.$$

Pour fixer les idées, si l'on prend comme unité de longueur le centimètre, en supposant $R = 1^{m} = 100^{cm}$, on a, pour la grandeur de l'accélération,

$$\gamma = \frac{4\pi^2 \times 100}{60^4}.$$

56. Mouvement curviligne uniforme quel-

conque. — Nous venons de voir que, dans un mouvement circulaire *uniforme,* l'accélération est constamment *normale* à la trajectoire. Ce fait est général en ce sens que, dans un mouvement *curviligne uniforme* quelconque, l'accélération est un vecteur *normal* à la trajectoire. En effet, supposons que la grandeur de la vitesse soit *constante;* alors, dans la construction de l'hodographe (n° 51), la longueur O'M' égale à la vitesse est *constante;* le lieu du point M', l'hodographe, est donc une courbe située sur une sphère de centre O', et la tangente M'V' à cette courbe est perpendiculaire au rayon O'M'. L'accélération MΓ parallèle à M'V' est donc perpendiculaire à la vitesse MV parallèle à O'M' : ce qui démontre la proposition.

57. Propriété caractéristique du mouvement rectiligne uniforme. — Dans un mouvement rectiligne uniforme, l'accélération est constamment nulle; réciproquement, *si un point se meut de telle façon que son accélération soit constamment nulle, il se meut d'un mouvement rectiligne uniforme.*

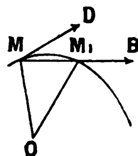
En effet, reportons-nous à la définition de l'accélération à l'aide de l'hodographe (n° 51). Si l'accélération MΓ est constamment nulle, cela veut dire que le point auxiliaire M' a une vitesse *constamment nulle.* Le point M' est donc immobile, et le vecteur O'M' est constant en grandeur, direction et sens. Comme O'M' est égal et parallèle au vecteur

vitesse MV, le mobile possède un mouvement dans lequel le vecteur vitesse est constant en grandeur, direction et sens; ce mouvement est donc rectiligne et uniforme (n° 49).

D'après cela, dans tout mouvement qui n'est pas à la fois rectiligne et uniforme, il existe une accélération : dans un mouvement *rectiligne varié,* l'accélération MΓ est dirigée suivant la droite parcourue par le mobile (n° 52); l'angle ΓMV de l'accélération avec la vitesse est alors 0° ou 180°. Dans un mouvement *curviligne uniforme,* le vecteur accélération MΓ est normal à la trajectoire : l'angle ΓMV est *droit.* Dans un mouvement *curviligne varié,* le vecteur accélération fait avec la tangente à la trajectoire un angle qui n'est ni nul ni droit : l'angle ΓMV est différent de 0°, 90°, 180°.

58. Dérivées géométriques. — Leur application à la définition de la vitesse et de l'accélération. — Soit un vecteur OM dont l'origine O est fixe (*fig.* 48) et dont l'extrémité M est animée d'un mouvement déterminé de façon à décrire une certaine trajectoire; à l'instant t le vecteur a une position OM, à l'instant $t + \Delta t$ une position OM_1. L'accroissement géométrique du vecteur est la *différence géométrique*

Fig. 48.



$$(OM_1) - (OM),$$

c'est-à-dire un vecteur égal à MM_1. Le rapport de cet accroissement à l'accroissement du temps est le vecteur MB,

$$MB = \frac{MM_1}{\Delta t},$$

ayant même direction et même sens que MM_1.

Quand Δt tend vers zéro, ce vecteur MB tend vers un vecteur limite MD tangent à la trajectoire qu'on appelle *dérivée géométrique du vecteur* OM.

D'après cela, *la dérivée géométrique d'un vecteur variable, d'origine fixe, est la limite du rapport de l'accroissement géométrique du vecteur à l'accroissement* Δt *du temps, quand* Δt *tend vers zéro.*

On voit alors immédiatement, d'après la définition même de la vitesse moyenne et de la vitesse, que : *la vitesse d'un point* M *est la dérivée géométrique d'un vecteur issu d'un point fixe quelconque et allant au mobile.*

On voit de même, d'après la définition de l'accélération à l'aide de l'hodographe, que : *l'accélération d'un mobile* M, *à un instant quelconque, est égale à la dérivée géométrique d'un vecteur* O′M′, *d'origine fixe* O′ (*fig.* 43), *égal à la vitesse* MV *du mobile.*

II. — MOUVEMENTS ÉLÉMENTAIRES D'UN SYSTÈME INVARIABLE OU CORPS SOLIDE.

59. **Exemples de mouvement d'un corps solide.** — Nous avons défini au n° 30 ce qu'il faut entendre par *système invariable* ou *corps solide*.

Lorsqu'un corps solide est en mouvement par rapport à un certain système de comparaison, les divers points A, B, C, ..., du corps décrivent certaines trajectoires avec certaines vitesses et certaines accélérations. Les distances mutuelles de ces points AB, BC, AC, ... restent invariables.

On prend souvent comme système de comparaison la Terre et l'on rapporte à la Terre les mouvements observés à sa surface. Voici quelques exemples de mouvements de corps solides par rapport à la Terre.

1° Quand on lance en l'air un corps solide pesant, comme une pierre, un bâton, etc., on voit, en général, ce corps se déplacer en tournant sur lui-même : son centre de gravité décrit une courbe qui est voisine d'une parabole d'axe vertical et qui serait rigoureusement une parabole sans la résistance de l'air; en même temps, le corps tourne.

2° Une bille de billard en mouvement est un corps solide en mouvement par rapport à la Terre : son centre décrit une trajectoire située dans un plan

parallèle au plan du tapis et, en général, la bille tourne en même temps que son centre se déplace.

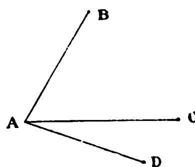
3° Une porte qu'on ouvre ou qu'on ferme, un tiroir de meuble qu'on fait mouvoir, une vis qu'on enfonce dans une pièce de bois donnent des exemples simples de corps solides en mouvement.

Nous n'étudierons pas ici les circonstances qui se présentent pour la distribution des vitesses et des accélérations aux différents points d'un solide en mouvement, dans le cas le plus général. Nous nous bornerons à des mouvements simples qui se rencontrent habituellement dans les objets usuels et dans les machines. Ces mouvements sont :

Le mouvement de translation;
Le mouvement de rotation;
Le mouvement hélicoïdal ou mouvement de vis.

60. Mouvement de translation. — Un corps solide est animé d'un mouvement de translation, par rapport à un système de comparaison (S), quand il se déplace de telle façon que tous les segments de droites, joignant les points du corps deux à deux, restent *parallèles* à des directions fixes prises dans le système (S). Pour cela il suffit évidemment que le trièdre obtenu en joignant un point A du corps (*fig.* 49)

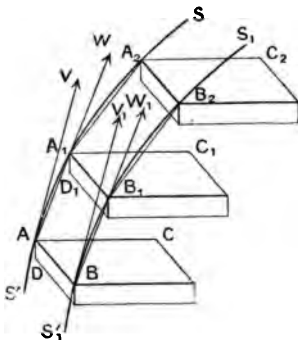
Fig. 49.



à trois points B, C, D du corps, non situés dans un même plan avec le point A, se déplace parallèlement à un trièdre invariablement lié au système (S); il suffit même que les côtés de l'angle BAC se déplacent parallèlement à deux directions fixes du système (S), puisque alors l'arête AD conserve nécessairement une direction fixe.

On peut dire, en langage vulgaire, qu'un corps solide est animé d'un mouvement de translation quand il se déplace *sans tourner* par rapport au système de comparaison.

Fig. 50.



Par exemple, imaginons un parallélépipède solide (*fig.* 50) qui se déplace de telle façon que l'un de ses sommets A décrive une courbe quelconque S'S, mais que ses arêtes AB, AC, AD conservent, par rapport à la Terre, des directions fixes : le parallélépipède est alors animé d'un mouvement de translation par rapport à la Terre.

Théorème I. — *Dans un mouvement de translation, les trajectoires décrites par les différents points du corps solide sont égales et peuvent être superposées par un mouvement de translation.*

En effet, soient A et B (*fig.* 50) deux points d'un corps animé d'un mouvement de translation; la droite AB conserve, pendant le mouvement, une grandeur et une direction fixes. Le point A décrit une trajectoire S'S, sur laquelle il occupe successivement les positions A, A_1, A_2, ...; le point B décrit une trajectoire $S'_1 S_1$ sur laquelle il occupe les positions correspondantes B, B_1, B_2, ... Comme les droites AB, A_1B_1, A_2B_2, ... sont égales et parallèles, la courbe S'S peut être superposée à $S'_1 S_1$ par un mouvement de translation, dans lequel chaque point de S'S décrit une portion de droite égale et parallèle à AB. D'après cela, quand un solide est animé d'un mouvement de translation, il suffit de connaître la trajectoire de l'un des points du corps pour connaître les trajectoires de tous les autres.

Quand les trajectoires des divers points sont des droites, ces droites sont nécessairement parallèles; le mouvement de translation est dit *rectiligne*. Quand les trajectoires des divers points sont des cercles, ces cercles sont égaux et situés dans des plans parallèles; le mouvement de translation est dit *circulaire*.

Théorème II. — *Dans un mouvement de translation, tous les points du corps solide ont, au même instant, des vitesses égales en grandeur, direction et sens.*

En effet, soient (*fig.* 50) A et B, les positions de

deux points quelconques du corps à l'instant t, A_1 et B_1 les positions de ces points à l'instant postérieur $t + \Delta t$. Les droites AB et A_1B_1 étant égales et parallèles, il en est de même des cordes AA_1 et BB_1, car la figure AA_1B_1B est un parallélogramme. Si l'on porte sur AA_1 et BB_1, à partir des points A et B, des vecteurs AW et BW_1 égaux à $\frac{AA_1}{\Delta t}$ et $\frac{BB_1}{\Delta t}$, ces deux vecteurs qui sont les vitesses moyennes des deux points ont même grandeur, même direction et même sens. Si maintenant Δt tend vers zéro, ces deux vecteurs égaux tendent vers les vitesses AV et BV_1 des points A et B à l'instant t; ces deux vitesses sont donc égales en grandeur, direction et sens.

A l'instant t, tous les points ont donc le même *vecteur vitesse :* ce vecteur est *la vitesse du mouvement de translation à l'instant t.*

Ainsi, un mouvement de translation sera dit *uniforme,* si la vitesse du mouvement est constante en grandeur quand t varie. Un mouvement de translation sera dit *rectiligne uniforme* si le mouvement est rectiligne et si de plus la vitesse a une grandeur constante, c'est-à-dire si la vitesse du mouvement de translation est constante en grandeur, direction et sens.

Théorème III. — *Dans un mouvement de translation, tous les points du solide ont au même instant la même accélération.*

En effet, comme tous les points ont, à chaque instant, la même vitesse, l'hodographe est, pour tous les points, identiquement la même courbe parcourue de la même façon : l'accélération est donc la même pour tous les points en grandeur, direction et sens. On l'appelle l'*accélération du mouvement de translation.*

Exemples. — Quand on ouvre ou ferme un tiroir d'un meuble, le tiroir prend, par rapport au meuble, un mouvement de translation rectiligne; le mouvement peut être effectué plus ou moins rapidement, mais, à chaque instant, tous les points du tiroir ont la même vitesse et la même accélération.

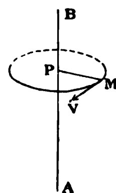
Quand on pose un verre plein d'eau sur une table, on lui donne instinctivement un mouvement qui est, à peu près, un mouvement de translation par rapport à la table.

Dans une locomotive, deux roues voisines situées d'un même côté sont réunies par une bielle d'accouplement qui oblige ces deux roues à tourner de la même façon, par rapport à la locomotive; cette bielle est un corps solide qui, par rapport à la locomotive, est animé d'un mouvement de translation circulaire.

61. Rotation d'un corps solide autour d'un axe fixe. — Imaginons (*fig.* 51) un corps solide dans lequel les points appartenant à une certaine droite AB

sont assujettis à rester *fixes* par rapport au système de comparaison : alors le corps ne peut plus que tourner autour de la droite AB. Quand il tourne, on dit qu'il possède un mouvement de rotation autour de AB; la droite AB s'appelle *axe de rotation*. C'est ainsi qu'une porte est, par l'intermédiaire des gonds, assujettie à tourner autour d'un axe fixe; que les aiguilles d'une montre sont animées, par rapport au cadran, d'un mouvement de rotation autour d'un axe fixe perpendiculaire au plan du cadran.

Fig. 51.



Quand le corps tourne autour de l'axe AB (*fig.* 51), chaque point M du corps décrit une circonférence dont le plan est perpendiculaire à l'axe, dont le centre est la projection P du point sur l'axe et dont le rayon est la distance MP du point à l'axe. La vitesse du point à un instant t est un vecteur MV tangent au cercle, c'est-à-dire un vecteur MV mené perpendiculairement au plan MAB du point M et de l'axe, dans le sens du mouvement. Il est évident que tous les points situés à la même distance de l'axe ont des vitesses égales en grandeur : en effet, si, pendant le temps Δt, le corps tourne d'un certain angle, tous les points situés à la même distance de l'axe décrivent des arcs de cercle égaux : leurs déplacements sont donc égaux, par suite leurs vitesses moyennes sont égales en grandeur et, en supposant que Δt tende vers

zéro, on voit que leurs vitesses à l'instant t sont égales en grandeur.

Vitesse angulaire. — D'après ce que nous avons vu (nº 47), la vitesse angulaire du point M est la grandeur de la vitesse du point du rayon PM situé à l'unité de distance du centre P.

Comme tous les points situés à l'unité de distance de l'axe ont la même vitesse en grandeur, on est conduit à appeler *vitesse angulaire du corps, à l'instant t, la grandeur* ω *de la vitesse des points du corps situés à l'unité de distance de l'axe.*

La vitesse linéaire d'un point M situé à la distance MP de l'axe a alors pour grandeur (nº 47)

$$v = \omega \, \mathrm{MP}.$$

Mouvement de rotation uniforme. — En général, la vitesse angulaire est variable avec t, car le corps peut, à certains instants, tourner plus vite qu'à d'autres. Quand ω est constant, le mouvement de rotation est *uniforme.*

Dans ce cas, les angles dont le corps tourne sont proportionnels aux temps pendant lesquels ils sont décrits, et l'on a, en appelant $\Delta\theta$ l'arc parcouru, pendant le temps Δt, par un point à l'unité de distance de l'axe,

$$\frac{\Delta\theta}{\Delta t} = \omega.$$

Quand les machines, dont certaines pièces tournent,

ont pris leur régime normal, la vitesse angulaire de chaque pièce tournante devient constante. On caractérise d'habitude le mouvement d'une de ces pièces par le nombre n de tours qu'elle exécute à la *minute*.

L'espace $2n\pi$ décrit par un point m situé à l'unité de distance de l'axe sur la circonférence de rayon *un*, d'un mouvement uniforme, en une minute, mesure la vitesse angulaire à la minute, et $\frac{2n\pi}{60} = \omega$ est la vitesse angulaire à la seconde. Cette formule peut servir à résoudre le problème inverse : connaissant ω, trouver n.

La vitesse linéaire à la seconde d'un point situé sur la pièce qui tourne à distance R de l'axe est

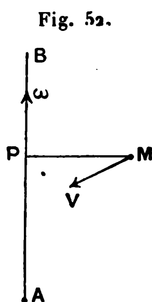
$$v = \omega R = \frac{2n\pi}{60} R.$$

Cette même formule peut servir à traiter le problème inverse : A combien de tours *à la minute* faut-il faire tourner un axe pour qu'un point qui lui est lié, à distance R, ait une vitesse *linéaire v à la seconde?*

Représentation d'une rotation par un vecteur. — Pour déterminer, à un instant t, les vitesses des différents points d'un solide animé d'un mouvement de rotation, il faut connaître trois éléments : *l'axe de rotation, la grandeur ω de la vitesse angulaire* et *le sens de la rotation.* On représente, comme il suit, ces trois éléments par un vecteur : on prend, sur l'axe

de rotation (*fig.* 52) un point quelconque A et, à partir de ce point, on porte sur l'axe un vecteur $A\omega$, de longueur ω, dans un sens tel que les points du corps tournent *dans le sens positif* autour de l'axe orienté $A\omega$ (n° 16). Rappelons que ce sens positif est tel qu'un observateur ayant les pieds en A et la tête en ω voie les points du corps tourner autour de lui de sa gauche vers sa droite.

Fig. 52.



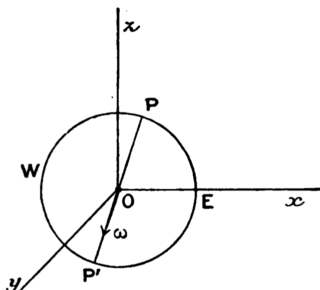
A chaque rotation correspond ainsi un vecteur dont le point d'application A est un point quelconque pris sur l'axe. Inversement, la rotation est entièrement caractérisée par le vecteur $A\omega$, car le vecteur $A\omega$ étant donné, on connaît l'axe de rotation qui est la droite portant ce vecteur, la vitesse angulaire qui est exprimée par le même nombre que la longueur $A\omega$ du vecteur, et le sens de la rotation qui est le sens positif des rotations autour de $A\omega$.

Exemples. — Par exemple (n° 47), si une montre est posée sur une table, le cadran en haut, la rotation de la grande aiguille sera représentée par un vecteur $A\omega$, perpendiculaire au cadran en son centre, orienté vers le haut et ayant une longueur exprimée à une certaine échelle par le nombre

$$\omega = \frac{2\pi}{60^2}.$$

Prenons, comme autre exemple, le mouvement de rotation de la Terre autour de son axe. Si l'on prend comme système de comparaison un trièdre $Oxyz$ ayant son sommet au centre de la Terre (*fig.* 53) et ayant ses arêtes dirigées vers trois étoiles fixes, le mouvement de la Terre par rapport à ce trièdre est une rotation uniforme autour d'un axe PP′, invariablement lié au trièdre. Cet axe s'appelle *ligne des pôles :* les points où il perce la surface sont les pôles terrestres P et P′; nous supposerons, dans la figure, que P soit le pôle nord et P′ le pôle sud. La durée de la rotation est d'environ 4 minutes (exactement $3^m 55^s,91$) plus courte que le jour moyen : elle constitue ce qu'on appelle le *jour sidéral* comprenant exactement un nombre $T = 24.60^2 - 3.60 - 55,91$ secondes de temps moyen. Ce mouvement de rotation se fait de l'ouest (W) à l'est (E). Sa vitesse angulaire ω est

Fig. 53.



$$(1) \qquad \omega = \frac{2\pi}{T} = 0,0000729,$$

nombre un peu plus grand que la moitié de la vitesse angulaire de la petite aiguille d'une montre. Le vec-

teur Oω, représentatif de la rotation terrestre, est donc dirigé suivant l'axe PP′, dans le sens PP′; sa grandeur est mesurée par le nombre ω (1).

Si l'on considère un point de la Terre situé à la distance r de l'axe, ce point a, par rapport au trièdre Oxyz, une vitesse linéaire v égale à ωr. Les points de la surface de la Terre ont donc des vitesses linéaires très différentes, suivant leurs latitudes; pour un point de l'équateur on a $r = 6378253^m$, avec une erreur possible de 75^m en plus ou en moins : la vitesse linéaire est donc de 465^m à la seconde; à la latitude d'Édimbourg, cette vitesse n'est plus que de 260^m à la seconde; au pôle elle est *nulle*.

Quand on emploie ce mode de représentation d'une rotation par un vecteur, la distribution des vitesses des divers points du corps qui tourne se rattache à la notion du moment linéaire par le théorème suivant :

Théorème. — *Une rotation étant représentée par un vecteur* Aω, *le vecteur vitesse* MV *d'un point quelconque* M *du corps est égal au moment linéaire du vecteur* Aω *par rapport au point* M.

En effet, le vecteur vitesse MV de M est égal au produit de la grandeur ω du vecteur Aω par la distance MP du point M à ce vecteur (*fig.* 52); il est perpendiculaire au plan MAω et dirigé de façon qu'un mobile allant de A en ω tourne autour de MV dans le sens positif. Or, c'est précisément là la définition

du moment linéaire du vecteur Aω (n° 17), par rapport à M. Le théorème est donc démontré.

D'après ce théorème, toutes les questions relatives aux vitesses des divers points d'un corps tournant se ramènent à des questions sur les moments linéaires.

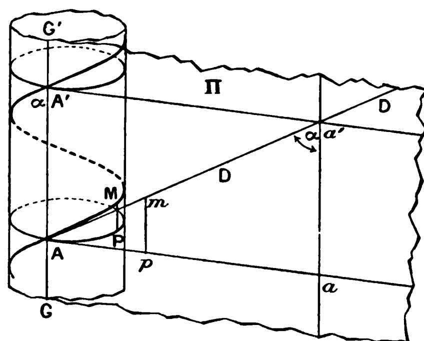
62. Mouvement hélicoïdal d'un solide. — Le mouvement hélicoïdal d'un corps solide est le mouvement que prend une vis par rapport à la pièce de bois dans laquelle elle se visse ou un tire-bouchon par rapport au bouchon. Pour le définir géométriquement, d'une façon rigoureuse, il faut que nous fassions connaître d'abord sommairement la définition et les propriétés caractéristiques de l'hélice circulaire.

Hélice. — Soient un cylindre droit (*fig.* 54) à section droite circulaire, un plan Π tangent au cylindre et une droite D tracée sur ce plan. Imaginons que ce plan Π soit parfaitement flexible et enroulons-le sur le cylindre : la droite se transformera en une courbe située sur la surface du cylindre : cette courbe est ce qu'on appelle une *hélice circulaire*. Le plan Π étant indéfini, peut s'enrouler une infinité de fois autour du cylindre, comme une pièce d'étoffe sur un rouleau; l'hélice fait donc une infinité de tours autour u cylindre. Si l'on considère une génératrice quelconque GG′ du cylindre, elle coupe l'hélice en un nombre indéfini de points équidistants, tels que A, A′, ... La longueur AA′ est la même sur toutes les

génératrices : on l'appelle le *pas de l'hélice*. L'arc AMA′ allant d'un point A au premier point A′ situé sur la même génératrice est une *spire* de l'hélice.

Cette courbe comprend, comme cas particuliers, la droite et le cercle : si la droite D du plan tangent Π

Fig. 54.



était parallèle aux génératrices du cylindre, l'hélice se réduirait évidemment à une génératrice, c'est-à-dire à une *ligne droite;* si la droite D du plan tangent Π était perpendiculaire aux génératrices, comme Aa par exemple, elle s'enroulerait sur une section droite APA du cylindre : l'hélice serait alors un cercle, et le pas *nul :* toutes les spires seraient confondues.

La droite D coupe toutes les parallèles aux génératrices sous un même angle α : cet angle se conserve dans l'enroulement du plan P; il en résulte que

l'hélice coupe toutes les génératrices du cylindre sous le même angle α. Réciproquement, une courbe tracée sur un cylindre de révolution et coupant toutes les génératrices sous un même angle est une hélice circulaire.

L'hélice circulaire partage avec la ligne droite et le cercle cette propriété remarquable que, *sur une même hélice circulaire, deux arcs ayant la même longueur sont égaux*, c'est-à-dire peuvent être superposés sans que leur forme soit altérée.

Établissons maintenant quelques relations élémentaires qui nous seront utiles plus loin. Soient une section droite APA menée par un point déterminé A de l'hélice, Π le plan tangent au cylindre le long de la génératrice AA', D la droite de ce plan qui, par l'enroulement du plan, engendre l'hélice; soit Aa la droite du plan Π qui s'enroule sur la section droite, de telle façon que le point a vienne en A après un tour d'enroulement et que

$$Aa = \text{circonférence APA} = 2\pi r,$$

en appelant r le rayon du cylindre. Soit de même a' le point de D qui vient en A', la droite aa' vient se placer après l'enroulement sur la génératrice AA', de sorte que aa' est égal au pas h et que le triangle Aaa' est rectangle en a. Prenons sur D un point m et menons la perpendiculaire mp sur Aa; après l'enroulement du plan Π, le point m vient en M sur l'hélice, mp se confond avec la génératrice MP du point M

et p vient en un point P de la section droite. L'arc d'hélice

$$s = \text{arc AM}$$

est égal à la droite Am; l'arc de cercle AP à Ap; MP est égal à mp; enfin la longueur L d'une spire AMA' est égale à la droite Ama'. Les triangles rectangles semblables Amp, $Aa'a$ donnent immédiatement

$$\frac{Ap}{pm} = \frac{Aa}{aa'} = \tang\alpha,$$

$$\frac{Ap}{Am} = \frac{Aa}{Aa'} = \sin\alpha,$$

$$\frac{pm}{Am} = \frac{aa'}{Aa'} = \cos\alpha,$$

$$Aa' = \sqrt{\overline{Aa}^2 + \overline{aa'}^2}.$$

On en conclut les relations suivantes sur l'hélice

$$(1) \qquad \frac{\text{arc AP}}{\text{PM}} = \frac{2\pi r}{h} = \tang\alpha,$$

$$(2) \qquad \left\{ \begin{aligned} \frac{\text{arc AP}}{s} &= \frac{2\pi r}{\text{L}} = \sin\alpha, \\ \frac{\text{PM}}{s} &= \frac{h}{\text{L}} = \cos\alpha, \end{aligned} \right.$$

$$\text{L} = \sqrt{4\pi^2 r^2 + h^2}.$$

La relation (1) exprime que le long de l'hélice la droite PM est *proportionnelle* à l'arc de section droite AP. Cette propriété est *caractéristique* de l'hélice : *si une courbe décrite sur un cylindre de*

révolution par un point M *est telle que, en menant une section droite du cylindre en un point* A *de cette courbe, l'arc* AP *varie proportionnellement à* PM, *cette courbe est une hélice.*

Sens d'enroulement d'une hélice. — Imaginons un observateur placé dans l'intérieur du cylindre suivant l'axe du cylindre, ayant par exemple les pieds en O et la tête en z (*fig*. 56). Supposons qu'un mobile parcoure l'hélice dans un sens tel que l'observateur voie ce mobile aller de ses pieds vers sa tête; alors, pour l'hélice représentée dans les figures 54 et 56, l'observateur voit ce mobile tourner autour de lui de *sa droite vers sa gauche*. Ce fait est indépendant du sens dans lequel l'observateur se place le long de l'axe. Car si l'on imagine un deuxième observateur ayant les pieds en O, mais la tête en z', et un mobile suivant l'hélice dans un sens tel que cet observateur le voie aller de ses pieds vers sa tête, il le voit encore tourner de sa droite vers sa gauche. D'après cette propriété, on dit que l'hélice des figures 54 et 56 est *enroulée de droite à gauche*. C'est là le sens ordinaire des vis et des tire-bouchons.

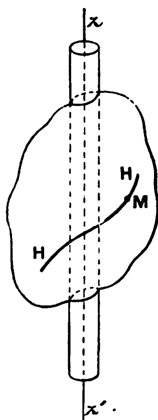
Une hélice enroulée en sens contraire est enroulé *de gauche à droite*.

Mouvement hélicoïdal. — Imaginons un corps solide pouvant tourner autour d'un axe fixe $z'z$ et en même temps glisser le long de cet axe, comme il

arriverait, par exemple (*fig.* 55), pour un solide traversé d'un canal rectiligne ayant la forme d'un cylindre de révolution dans lequel passerait une tige rigide fixe de même forme.

Dans ces conditions, le corps peut prendre une infinité de mouvements : on peut, par exemple, le faire tourner autour de l'axe, ou le faire glisser le long de l'axe, ou le faire tourner en même temps qu'on le fait glisser. Il est évident que, dans chacun de ces mouvements, tous les points du solide tournent du même angle autour de l'axe et glissent de la même quantité parallèlement à l'axe.

Fig. 55.

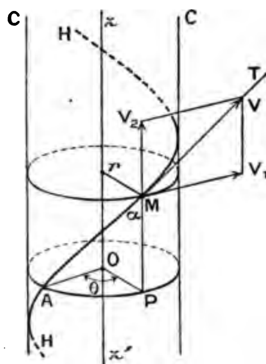


Pour déterminer la position du corps, il suffit de connaître la position d'un point déterminé M du corps arbitrairement choisi ; ce point reste à une distance constante r de l'axe $z'z$ dans toutes les positions que le corps peut prendre ; il reste donc sur un cylindre géométrique fixe C de rayon r, de révolution autour de $z'z$. Imaginons alors que, par un procédé quelconque, on oblige ce point à suivre une hélice H tracée sur ce cylindre C : le corps solide est obligé de suivre le mouvement du point M en tournant autour de l'axe et en glissant en même temps le long de l'axe : il prend ce qu'on appelle un *mouvement hélicoïdal*.

Le mouvement hélicoïdal étant ainsi défini, nous allons en indiquer les propriétés essentielles.

Soit (*fig.* 56) A un point de l'hélice H décrite par le point M; traçons la section droite du cylindre C passant par A et menons la génératrice MP du point M, P étant le point de rencontre de cette génératrice avec la section droite. Appelons O le centre de la section droite, r son rayon OP, θ l'angle AOP évalué en parties du rayon comme en trigonométrie et z la longueur MP.

Fig. 56.



Le point M suit l'hélice H en entraînant le corps. Quand ce point est dans la position particulière A, le corps occupe une certaine position (Π_0); quand ce point est arrivé dans la position M, le corps solide occupe une position correspondante (Π). On peut dire que, pour passer de la position (Π_0) à la position (Π), le corps a tourné de l'angle $\theta =$ AOP autour de l'axe $z'z$ et a, en même temps, glissé de la longueur $z =$ PM le long de l'axe. Comme on a, dans l'hélice H, en appelant h le pas de cette hélice,

$$\frac{\text{PM}}{\text{arc AP}} = \frac{h}{2\pi r}$$

et que

$$\text{arc AP} = r\theta,$$

les deux quantités θ et z sont liées par la relation

$$(3) \qquad \frac{z}{\theta} = \frac{h}{2\pi}$$

qui exprime que le rapport $\frac{z}{\theta}$ est *constant*.

Donc, *quand un corps est animé d'un mouvement hélicoïdal, la longueur dont il glisse le long de l'axe est proportionnelle à l'angle dont il tourne autour de l'axe.*

En particulier, en faisant $\theta = 2\pi$, on a $z = h$: *lorsque le corps tourne de* 2π, *c'est-à-dire fait un tour entier, il glisse le long de l'axe d'une longueur égale au pas de l'hélice servant à définir le mouvement.*

La propriété que nous venons d'établir est *caractéristique* du mouvement hélicoïdal : *si un solide se meut en tournant autour d'un axe fixe* $z'z$ *et glissant en même temps le long de cet axe, de telle façon que la longueur dont le corps a glissé, depuis une certaine position, soit proportionnelle à l'angle dont il a tourné, à partir de la même position, le mouvement est hélicoïdal.* Pour le démontrer nous ferons voir que, dans cette hypothèse, tous les points du corps décrivent des hélices de *même pas* tracées sur des cylindres de révolution autour de l'axe $z'z$ En effet, appelons, comme plus

haut, (Π_0) et (Π) deux positions successives du corps. Si nous prenons un point quelconque du corps, nous voyons d'abord que ce point reste à une distance constante r de l'axe $z'z$; il décrit donc une courbe sur un cylindre C de révolution de rayon r, d'axe $z'z$. Soient A et M les positions de ce point correspondant aux deux positions (Π_0) et (Π) du corps (*fig.* 56), P le point où la génératrice du point M rencontre la section droite du cylindre C passant par A, O le centre de cette section. Par hypothèse, la longueur $PM = z$ est proportionnelle à l'angle $AOP = \theta$. Appelons h la valeur de z correspondant à $\theta = 2\pi$: on aura

$$(3) \qquad \frac{z}{\theta} = \frac{h}{2\pi}.$$

Mais alors, comme l'arc AP est égal à $r\theta$, on a

$$MP = \frac{h}{2\pi r} \operatorname{arc} AP:$$

ce qui montre que le point M décrit, sur le cylindre fixe C, une hélice de pas h. Le mouvement est donc hélicoïdal, d'après la définition que nous avons donnée.

Comme le point M est un point arbitraire du corps, on voit que tous les points du corps décrivent des hélices tracées sur des cylindres de révolution autour de l'axe $z'z$ et *ayant toutes le même pas h*. La valeur commune h du *pas* se nomme le *pas du mouvement hélicoïdal :* c'est la longueur dont le corps a

glissé le long de l'axe quand il a fait un tour entier.

Nous avons ainsi caractérisé *géométriquement* le mouvement hélicoïdal. Disons quelques mots du point de vue *cinématique*.

Vitesse d'un point du corps. — Il est évident que le corps animé du mouvement hélicoïdal peut se mouvoir plus ou moins vite; pour définir la loi du mouvement en fonction du temps, on peut se donner : 1° le pas h du mouvement hélicoïdal; 2° l'expression en fonction du temps t de l'angle θ évalué en parties du rayon dont le corps a tourné à partir d'une certaine position (Π_0).

Dans ces conditions, la longueur z dont le corps a glissé le long de l'axe $z'z$, à partir de la même position, est aussi une fonction connue du temps liée à θ par la relation (3) que nous écrirons

$$(4) \qquad z = \frac{h}{2\pi}\theta.$$

Nous supposerons, pour simplifier, que l'on a choisi les sens positifs de θ et z de façon que ces quantités croissent avec t. Soient

$$\omega = \frac{d\theta}{dt}, \qquad G = \frac{dz}{dt}$$

les dérivées de θ et z par rapport au temps : la quantité ω s'appelle *vitesse angulaire de rotation* du corps à l'instant t autour de l'axe $z'z$, et la quantité G

vitesse de glissement du corps parallèlement à l'axe $z'z$ au même instant. Ces deux quantités ne sont pas indépendantes : en effet, en prenant les dérivées par rapport au temps des deux membres de la relation fondamentale (4) qui caractérise le mouvement hélicoïdal, on a immédiatement

$$G = \frac{h}{2\pi}\omega \tag{5}$$

Ceci posé, cherchons à l'instant t la vitesse d'un point M du corps situé à la distance r de l'axe. Ce point décrit une hélice H sur un cylindre fixe C de rayon r. Soit $s = AM$ (*fig.* 56) l'arc de cette hélice compté à partir de la position A occupée par M au moment où $\theta = 0$. Quand on connaît θ en fonction du temps, on en déduit immédiatement la loi du mouvement du point M sur l'hélice H. En effet, cette hélice ayant un pas connu h et étant tracée sur un cylindre de rayon r, coupe les génératrices sous un angle constant α donné par la relation (1) de la page 134

$$\tan\alpha = \frac{2\pi r}{h}.$$

Dès lors, on a immédiatement, d'après les propriétés de l'hélice (p. 134),

$$\text{arc AP} = s\sin\alpha,$$
$$\text{PM} = s\cos\alpha,$$

c'est-a-dire, d'après les notations précédentes,

$$r\theta = s \sin\alpha, \qquad z = s \cos\alpha. \tag{6}$$

On voit donc que, si l'on connaît θ ou z en fonction de t, on a immédiatement s en fonction de t et l'on connaît la loi du mouvement de M sur l'hélice H. Menons à cette hélice la tangente MT dans le sens positif des arcs (*fig.* 56) et supposons, pour simplifier, que l'on ait pris, comme sens positif, le sens dans lequel se meut le mobile M à l'instant considéré. Le vecteur vitesse MV de M est alors dirigé dans le sens MT et sa grandeur est

$$MV = \frac{ds}{dt}. \tag{7}$$

Nous allons décomposer cette vitesse MV (*fig.* 56) en deux composantes rectangulaires MV_1 et MV_2 dirigées, l'une suivant la tangente à la section droite du cylindre C menée par M, l'autre suivant la génératrice du même cylindre passant par M. Dans ces conditions, le triangle rectangle MV_2V, dans lequel l'angle en M est α, donne immédiatement

$$MV_1 = MV \sin\alpha, \qquad MV_2 = MV \cos\alpha,$$

c'est-à-dire, d'après la valeur (7) du vecteur vitesse

$$MV_1 = \frac{ds}{dt}\sin\alpha, \qquad MV_2 = \frac{ds}{dt}\cos\alpha. \tag{8}$$

Mais en prenant les dérivées des deux membres des

relations (6), où r et α sont constants, on a

$$r\frac{d\theta}{dt} = \frac{ds}{dt}\sin\alpha, \qquad \frac{dz}{dt} = \frac{ds}{dt}\cos\alpha.$$

Donc, d'après (8), les deux composantes MV_1 et MV_2 de la vitesse MV sont

$$(9) \qquad MV_1 = r\frac{d\theta}{dt}, \qquad MV_2 = \frac{dz}{dt},$$

c'est-à-dire, d'après les définitions de la vitesse de rotation ω et de la vitesse de glissement G,

$$(10) \qquad MV_1 = r\omega, \qquad MV_2 = G.$$

Voici comment on peut interpréter ces formules. Si le corps tournait autour de l'axe $z'z$ avec la vitesse angulaire ω sans glisser le long de l'axe, le point M aurait la vitesse MV_1 ; si le corps glissait parallèlement à l'axe $z'z$ avec la vitesse G, sans tourner, le point M aurait la vitesse MV_2. En réalité, dans le mouvement hélicoïdal, le corps tourne et glisse, et un point quelconque M du corps possède une vitesse MV égale à la somme géométrique des vitesses MV_1 et MV_2 provenant l'une de la rotation, l'autre du glissement.

En connaissant à un instant t les deux quantités ω et G, on peut donc se représenter à cet instant la distribution des vitesses des divers points du corps d'une façon très simple.

Considérons en particulier, à l'instant t, divers points M du corps situés sur une même perpendicu-

laire à l'axe $z'z$: ce qui varie, d'un de ces points à l'autre, c'est la distance r à l'axe. La grandeur MV de la vitesse d'un de ces points est, à l'instant t,

$$\text{(11)} \qquad MV = \sqrt{MV_1^2 + MV_2^2} = \sqrt{r^2\omega^2 + G^2};$$

elle croît avec r, à partir de la valeur G qu'elle prend en un point situé sur l'axe ($r = 0$). La direction de cette vitesse MV est déterminée par le fait que le vecteur MV est perpendiculaire au rayon du cylindre aboutissant en M et fait avec la direction de l'axe $z'z$ du mouvement hélicoïdal un angle α tel que

$$\text{tang}\,\alpha = \frac{MV_1}{MV_2} = \frac{\omega r}{G} = \frac{2\pi r}{h};$$

l'angle α est donc nul pour un point du corps situé sur l'axe; il augmente et tend vers un droit à mesure qu'on prend des points de plus en plus éloignés de l'axe. On peut remarquer que, quand r varie, la composante MV_2 reste toujours la même, tandis que MV_1 croît proportionnellement à r.

Mouvement hélicoïdal uniforme. — Le mouvement hélicoïdal est dit *uniforme* quand l'angle de rotation θ varie proportionnellement au temps, c'est-à-dire quand on a

$$\theta = kt + \theta_0,$$

où k et θ_0 sont des constantes : il en résulte que

z varie aussi proportionnellement au temps, car

$$z = \frac{h}{2\pi}\theta = \frac{h}{2\pi}(kt + \theta_0).$$

Alors les vitesses ω et G de rotation et de glissement sont constantes :

$$\omega = \frac{d\theta}{dt} = k,$$

$$G = \frac{dz}{dt} = \frac{hk}{2\pi}.$$

Dans ce cas, chaque point M du corps décrit une hélice H de pas h *d'un mouvement uniforme,* ainsi qu'il résulte des relations (6) ou de l'expression (11) de la grandeur de la vitesse du point M. Inversement, si, dans un mouvement hélicoïdal, ω est constant, θ varie proportionnellement à t et le mouvement est uniforme.

63. Réalisation pratique de ces mouvements. — D'une façon générale, pour faire en sorte qu'un corps solide ne puisse prendre qu'un certain mouvement donné, on empêche, par d'autres corps solides en contact avec lui, tous les autres mouvements, de telle façon que le mouvement donné soit le seul possible. Nous allons, à ce point de vue, étudier successivement la réalisation pratique des mouvements de translation, de rotation, et du mouvement hélicoïdal.

1° **Mouvement de translation.** — Dans les objets usuels et dans les machines, les mouvements de translation ordinairement employés sont des mouvements *rectilignes*.

Pour faire en sorte qu'un corps solide A ne puisse prendre, par rapport à un autre corps solide B, qu'un mouvement de translation rectiligne, on taille ordinairement des parties du corps A en forme de prismes ou de cylindres parallèles, et on les engage dans d'autres prismes ou cylindres parallèles, creusés dans le corps B, ayant mêmes sections droites et mêmes positions relatives que ceux du corps A. Dans ces conditions, il est évident que l'un des corps, B par exemple, étant regardé comme fixe, l'autre A ne peut que glisser dans la direction des prismes ou cylindres engagés les uns dans les autres. On dit, dans ce cas, que le mouvement de translation rectiligne d'un des corps, par rapport à l'autre, est réalisé à l'aide de *glissières rectilignes*.

Par exemple, un tiroir de meuble est un solide limité par des faces planes formant un prisme droit qui glisse dans un autre prisme creux, de même section droite, dont les parois sont constituées par le meuble.

Un couvercle de boîte à coulisses, comme un couvercle de boîte à dominos, est également guidé par deux rainures cylindriques parallèles formant glissières. Il en est de même pour certaines portes à coulisses.

Il faut, bien entendu, éviter de tailler le corps solide A en forme d'un seul cylindre circulaire droit; car alors il faudrait l'engager dans un cylindre circu

Fig. 57.

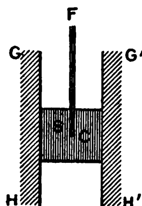
laire creux de même section droite creusé dans B, et le corps A pourrait prendre, par rapport à B, d'autres mouvements qu'un mouvement de translation parallèle aux génératrices, puisqu'il pourrait tourner par rapport à B.

Nous donnerons un dernier exemple de glissière emprunté aux machines à vapeur.

Dans une machine à vapeur le mouvement de va-et-vient de la tige du piston FJ (*fig.* 57) est transformé en un mouvement de rotation autour d'un axe fixe A par l'intermédiaire d'une pièce rigide CB, appelée *bielle*, articulée à l'extrémité de la manivelle AB. Pour que la tige du piston ne soit pas faussée par la bielle, qui exerce sur elle un effort oblique, on guide sa tête C par une glissière rectiligne JM qui ne lui permet plus qu'un mouvement de translation rectiligne.

Pour cela, on réunit l'extrémité C de la tige FC du piston au centre d'une pièce rectangulaire S (*fig.* 58), comprise entre deux surfaces planes ou glissières rectilignes GH, G'H'.

Fig. 58.



2° **Mouvement de rotation.** — Pour faire en sorte que le seul mouvement possible d'un corps solide A, par rapport à un autre corps solide B, soit une rotation, on lie au corps A un solide rigide de révolution qui s'engage dans un creux, limité par une surface de révolution égale, pratiqué dans B. Ordinairement, les surfaces de révolution employées sont des cylindres circulaires; mais alors, il faut empêcher l'un des cylindres de glisser dans l'autre, suivant le sens des génératrices, par des saillies solides faisant obstacle

au glissement. Dans ces conditions, l'un des corps étant regardé comme fixe, l'autre ne peut que tourner par rapport à lui autour de l'axe commun des deux surfaces de révolution.

Quelquefois on pratique dans les deux corps des ouvertures formant des cylindres circulaires creux égaux, et on les traverse d'un troisième cylindre circulaire égal, en ajoutant des pièces qui empêchent les deux corps de glisser l'un par rapport à l'autre.

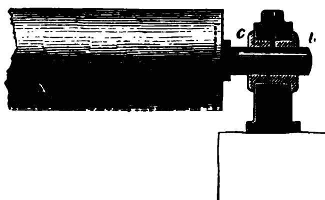
Les exemples de ce genre de mécanisme se rencontrent dans les objets les plus usuels. Ainsi dans les boîtes dont le couvercle se soulève en prenant, par rapport à la boîte, un mouvement de rotation, la liaison du couvercle avec la boîte est réalisée par des *charnières* qui rentrent précisément dans le deuxième mode de liaison que nous venons de décrire.

Le mouvement de rotation d'une porte, par rapport aux montants de la porte, est réalisé par les *gonds;* la porte est munie de cylindres de fer creux, de révolution autour d'un même axe, venant coiffer des cylindres de fer égaux de même axe fixés à l'un des montants. La porte demeure ainsi suspendue, et en mesure de tourner autour d'un axe vertical fixe. Comme les forces usuelles agissant sur la porte ne tendent pas à la soulever, il est inutile d'ajouter des pièces empêchant le glissement de la porte vers le haut. Cette circonstance permet de démonter la porte en la soulevant pour la faire sortir des gonds.

Pour réaliser le mouvement de rotation d'une roue,

par rapport à une voiture, on lie invariablement à la voiture un cylindre de fer appelé *essieu,* qui passe dans une ouverture cylindrique circulaire percée au centre de la roue.

Fig. 59.



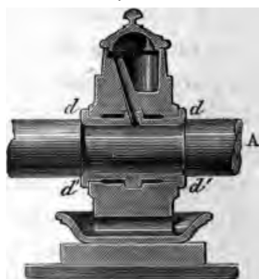
Dans les machines, les pièces à mouvement de rotation autour d'axes horizontaux sont montées sur des arbres cylindriques horizontaux A qui sont soutenus en des points convenablement espacés par des *paliers* (*fig.* 59, 60 et 61); ceux-ci sont munis de *cylindres creux cb* (*fig.* 59) ou *ddd'd'* (*fig.* 61) appelés *coussinets,* qui embrassent l'arbre A le long

Fig. 60.



Vue de face du palier et de l'arbre.

Fig. 61.



Coupe du palier par l'axe de l'arbre.

d'une partie généralement plus étroite qu'on nomme *tourillon,* et guident la rotation de celui-ci autour de son axe. Ordinairement les arbres des roues sont

beaucoup plus gros que leurs tourillons : cette disposition est adoptée en vue de réduire l'influence du frottement du tourillon sur les coussinets. Pour empêcher l'arbre de glisser dans le sens de son axe on munit l'arbre de bourrelets ou anneaux dd', dd' (*fig.* 61), ou cc', bb' (*fig.* 62), qu'on appelle les *épaulements*, et qui s'appuient latéralement contre les coussinets. Quand l'arbre est soumis à des efforts considérables dans le sens de l'axe, on termine quelquefois les tourillons par des parties arrondies formant pivot et venant s'appuyer contre un épaulement extérieur.

Fig. 62.

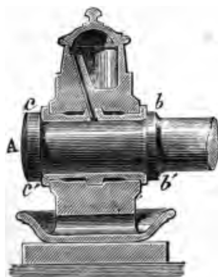
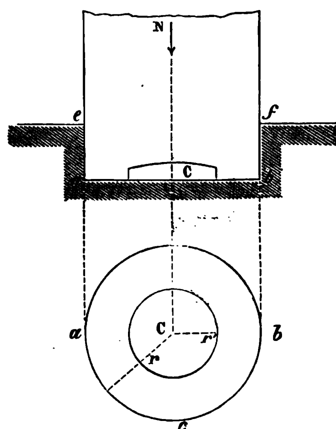


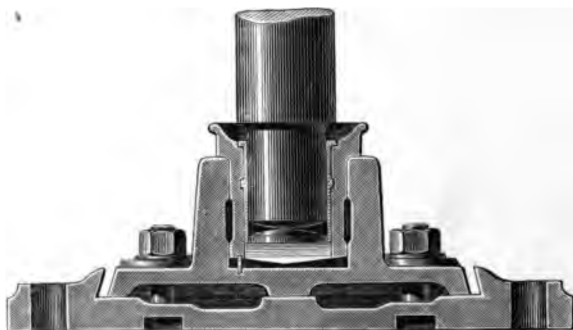
Fig. 63.



Quand, dans une machine, une pièce doit tourner autour d'un axe vertical, on attache invariablement à cette pièce (*fig.* 63) un cylindre de révolution vertical NC, appelé *pivot*, terminé par une base circu-

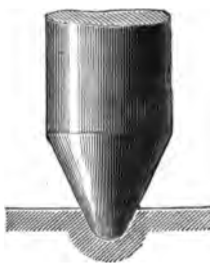
laire *ab* qui pénètre dans un cylindre creux fixe *eabf*, appelé ***crapaudine*** : le pivot s'appuie sur le fond

Fig. 64.



plan de la crapaudine contre les bords de laquelle il est épaulé latéralement : on évide souvent le pivot dans sa partie centrale C; alors il ne repose plus sur le fond de la crapaudine que par une couronne ou zone annulaire limitée par deux circonférences concentriques.

Fig. 65.

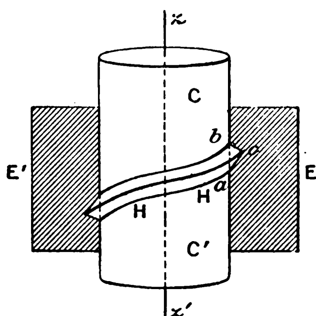


Il arrive aussi que, pour diminuer l'influence du frottement, on termine (*fig.* 64) la base du pivot par une calotte sphérique convexe qui elle-même repose sur une partie convexe du fond de la crapaudine; dans d'autres cas (*fig.* 65), le pivot est terminé par une surface de

révolution ayant la forme d'un cône raccordé par une calotte sphérique, et il repose dans une cavité de même forme creusée dans le corps servant de crapaudine.

3° **Mouvement hélicoïdal.** — Pour réaliser pratiquement un mouvement hélicoïdal, on emploie le système de deux corps solides appelés *vis et écrou*. Imaginons un cylindre circulaire droit CC′ sur lequel est tracée une hélice H de pas *h* (*fig.* 66) : considérons une petite surface plane *abc*, par exemple un triangle équilatéral, dont le plan passe constamment par l'axe $z'z$ du cylindre, et qui se déplace de façon qu'un de ses points, *a* par exemple, décrive l'hélice. Cette surface engendre un solide qu'on appelle *filet de vis* : le filet a diverses formes suivant la nature de la petite surface mobile *abc*; quand c'est un triangle on obtient un filet de vis triangulaire (*fig.* 66); quand c'est un carré, on obtient un filet de vis carré (*fig.* 67).

Fig. 66.

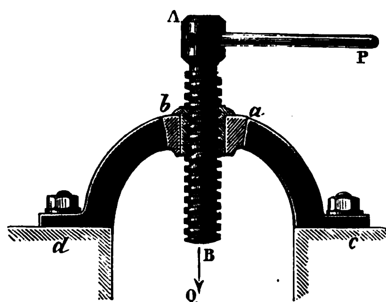


Supposons que le cylindre soit réalisé matériellement et que le filet de vis soit également réalisé ma-

tériellement et invariablement lié au cylindre; nous avons alors *une vis*. Imaginons, d'autre part, que le cylindre circulaire CC' soit engagé dans un corps solide creux EE' limité intérieurement par la même surface et que la petite surface plane *abc* en se déplaçant, pour engendrer le filet de la vis, creuse dans le corps EE' un canal identique au filet de la vis, de telle façon que le creux du solide EE' soit identique à la saillie du solide CC'. Le corps EE' ainsi formé s'appelle l'*écrou*.

Dès lors, il est évident que l'un des deux corps solides, *vis* ou *écrou*, étant regardé comme fixe,

Fig. 67.



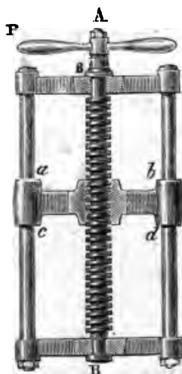
l'autre ne pourra prendre, par rapport à lui, qu'un mouvement hélicoïdal de pas h.

La figure 67 représente une vis à filet carré AB mobile dans l'écrou *ab*.

La figure 68 représente une vis qui peut tourner autour de son axe AB dans un châssis fixe, l'écrou

abcd étant, par rapport au châssis, assujetti à glisser sans pouvoir tourner. Alors la vis s'appuie par un pivot dans une crapaudine ou contre un épaulement B, tandis que l'écrou est guidé le long du châssis par des glissières ou des guides rectilignes.

Fig. 68.



Il est intéressant de remarquer que dans le mécanisme (*fig.* 68) se trouvent réalisés les trois mouvements élémentaires que nous venons de décrire et d'étudier.

La vis AB peut prendre, par rapport au châssis, un mouvement de rotation; l'écrou *abcd* possède alors, par rapport au châssis, un mouvement de translation rectiligne; la vis possède, par rapport à l'écrou, un mouvement hélicoïdal.

IV. — CHANGEMENT DU SYSTÈME DE COMPARAISON.

64. Énoncé du problème. — Nous avons vu que le mouvement d'un point est un phénomène relatif qui dépend du système de comparaison auquel on rapporte les positions successives du mobile. Dès lors, quand on connaît le mouvement d'un point M par rapport à un système de comparaison (S), on peut

avoir à étudier le mouvement du même point par rapport à un autre système de comparaison (A), connaissant le mouvement du système (S) par rapport au système (A).

On dit alors que le mouvement du mobile M par rapport au système (A) est le *mouvement résultant* du mouvement de M par rapport au système (S) et du mouvement du système (S) par rapport au système (A).

Imaginons, par exemple, un bateau (S) en mouvement sur un fleuve par rapport aux rives (A). Une bille roule sur le pont du bateau : son centre M décrit par rapport au bateau (S) une certaine trajectoire suivant une certaine loi. On peut se proposer de trouver le mouvement de ce point par rapport aux rives (A) : ce dernier mouvement est le mouvement résultant du mouvement du centre de la bille par rapport au bateau et du mouvement du bateau par rapport aux rives.

Pour simplifier le langage, on appelle *mouvement relatif* le mouvement du point M par rapport au premier système de comparaison (S) : la trajectoire C, la vitesse V_r et l'accélération Γ_r du point M par rapport à ce système (S) s'appellent *trajectoire, vitesse, accélération relatives;* c'est ce mouvement relatif que verrait un observateur entraîné avec le système (S) et croyant ce système immobile.

Le mouvement du système (S) par rapport au système (A) se nomme *mouvement d'entraînement*.

Enfin la trajectoire C_a, la vitesse V_a, l'accélération Γ_a du point M par rapport au système (A) s'appellent *trajectoire, vitesse, accélération du mouvement résultant.*

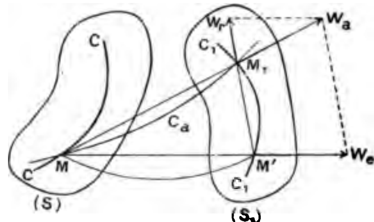
Ainsi, dans l'exemple précédent, le mouvement du centre M de la bille par rapport au bateau (S) est le mouvement relatif : quand la bille roule sur le pont, son centre décrit, par rapport au bateau, une courbe C qu'on pourrait approximativement tracer à la craie sur le pont : cette courbe est la trajectoire relative; elle est invariablement liée au bateau; le centre M de la bille a, par rapport au bateau, une certaine vitesse et une certaine accélération à l'instant t : ce sont la vitesse et l'accélération relatives. Le bateau possède par rapport aux rives un certain mouvement qui est le mouvement d'entraînement. Enfin la bille est animée, par rapport aux rives, d'un certain mouvement résultant dans lequel elle décrit une trajectoire C_a, avec une vitesse V_a et une accélération Γ_a.

Mouvement d'entraînement; vitesse et accélération d'entraînement. — Le système de comparaison (S) est (*fig.* 69) un corps solide animé, par rapport au système (A), d'un mouvement connu qui peut être, dans les cas les plus simples, un mouvement de translation, ou un mouvement de rotation, ou un mouvement hélicoïdal, etc.

Considérons un point géométrique *invariablement lié* au système (S) : quand t augmente de Δt, ce point

est entraîné par le système (S) et subit par rapport au système (A) un déplacement appelé *déplacement d'entraînement;* il possède par rapport au système (A) une vitesse et une accélération qui s'appellent *vitesse* et *accélération d'entraînement de ce point.* Chaque point du système (S) a ainsi, à l'instant t, une certaine vitesse et une certaine accélération d'entraînement.

Fig. 69.



Le point mobile M que nous considérons se meut par rapport au système (S) : on appelle, par définition, *vitesse* et *accélération d'entraînement du point* M *à l'instant t,* la vitesse V_e et l'accélération Γ_e que possède, à l'instant t, le point géométrique du système (S) qui coïncide avec M à l'instant considéré; on peut dire aussi que la vitesse et l'accélération d'entraînement du point mobile M, à l'instant t, sont la vitesse V_e et l'accélération Γ_e que posséderait ce point si, dans la position qu'il occupe à cet instant, il était invariablement lié au système (S). Lorsque le mouvement de (S) est un mouvement de translation, un mouvement de rotation ou un mouvement hélicoïdal, la

vitesse d'entraînement V_e est connue par les résultats exposés au § III.

Ces définitions étant posées, on a le théorème suivant :

La vitesse V_a *du point* M, *dans le mouvement résultant, est la somme géométrique de la vitesse relative* V_r *et de la vitesse d'entraînement* V_e *de ce point.*

Pour le démontrer, représentons en C (*fig.* 69) la trajectoire relative du mobile M par rapport au système de comparaison de (S). Pendant que le mobile M décrit cette courbe C invariablement liée à (S), le système (S) se déplace de telle façon qu'à l'instant t, le mobile, le système de comparaison et la trajectoire relative occupent les positions M, (S) et C, tandis qu'à l'instant postérieur $t + \Delta t$, ils occupent les positions M_1, (S_1), C_1. Le déplacement résultant du mobile est MM_1 : le mobile va de M en M_1 en suivant une certaine trajectoire C_a qui est la trajectoire du mouvement résultant.

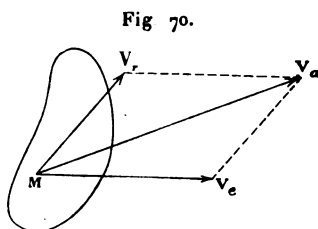
Appelons M' la position qu'occupe à l'instant $t + \Delta t$ le point géométrique du système (S) avec lequel M était en coïncidence à l'instant t : le déplacement $M'M_1$ est *le déplacement relatif* du mobile par rapport au système (S) ; le déplacement MM' est le *déplacement d'entraînement*. Le vecteur MM_1 étant la somme géométrique des vecteurs $M'M_1$ et MM', si l'on porte sur chacun de ces vecteurs des vecteurs MW_a, $M'W_r$

et MW_e égaux respectivement aux quotients de ces vecteurs par Δt, ces nouveaux vecteurs sont (n° 46) la vitesse moyenne du mouvement résultant, la vitesse moyenne du mouvement relatif et la vitesse moyenne d'entraînement; le premier de ces nouveaux vecteurs est la somme géométrique des deux autres, et l'on a l'égalité géométrique

$$(1) \qquad (W_a) = (W_r) + (W_e).$$

Si maintenant Δt tend vers zéro, les points M′ et M_1 se confondent avec M, C_1 se confond avec C, les trois vecteurs précédents tendent respectivement vers trois vecteurs V_a, V_r, V_e issus du point M (*fig.* 70) égaux respectivement à la vitesse V_a du mouvement résultant à l'instant t, à la vitesse relative V_r et à la vitesse d'entraînement V_e. La relation géométrique (1) donne alors la relation limite

Fig. 70.



$$(V_a) = (V_r) + (V_e),$$

ce qui démontre le théorème.

Ces trois derniers vecteurs sont respectivement tangents en M, l'un V_a à la trajectoire du mouvement résultant, l'autre V_r à la trajectoire relative C, le troisième V_e à la trajectoire du point géométrique

du système (S) avec lequel le point mobile M est en coïncidence à l'instant t.

Si l'on appelle α l'angle des vecteurs V_r et V_e, on a immédiatement, pour déterminer la grandeur de V_a, la formule (n° 13)

$$(2) \qquad V_a^2 = V_r^2 + V_e^2 + 2V_rV_e\cos\alpha.$$

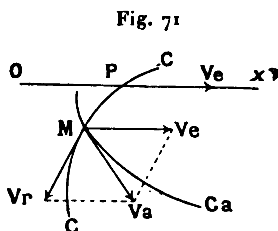
Lorsque les deux vecteurs V_r et V_e ont même direction et même sens ($\alpha = 0$), V_a a aussi même direction et même sens et a pour grandeur la somme des grandeurs de V_r et de V_e; lorsque V_r et V_e ont même direction mais ont des sens opposés ($\alpha = \pi$), V_a a la même direction, a pour sens le sens de la plus grande des vitesses composantes et est égale en grandeur à leur différence.

Nous ne nous occupons pas ici de la détermination générale de l'accélération du mouvement résultant qui s'obtient par une règle moins simple que celle qui donne la vitesse : nous appliquerons le théorème précédent à quelques exemples, en supposant successivement que le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation rectiligne uniforme, ou un mouvement de rotation uniforme, et que le mouvement relatif du mobile est un mouvement rectiligne uniforme, ou un mouvement circulaire uniforme.

65. Le mouvement d'entraînement est un mouvement de translation rectiligne uniforme. — Nous avons vu que la trajectoire relative C est une

courbe de forme invariable entraînée par le système de comparaison (S) : dans l'hypothèse actuelle, la courbe C est donc animée d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme : la vitesse V_e de ce mouvement de translation est donc constante en grandeur, direction et sens. Un point quelconque P de C décrit une droite fixe Ox (*fig.* 71) avec la vitesse constante V_e; tous les autres points de C décrivent des droites parallèles avec la même vitesse. Le mouvement d'entraînement est ainsi défini. Pour définir le mouvement du mobile M, il suffit de connaître l'arc PM $= s$ en fonction de t. Quand t varie, la courbe C se déplace, le point M marche sur la courbe, et, dans le mouvement résultant, il décrit une trajectoire C_a. La vitesse V_a du mouvement résultant est la somme géométrique de la vitesse d'entraînement MV_e, constante en grandeur, direction et sens, et de la vitesse relative MV_r, tangente à C. Cette vitesse V_a est tangente à C_a.

Fig. 71

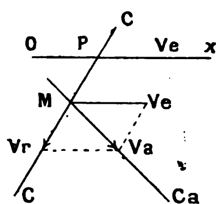


Examinons quelques cas particuliers.

1° Le mouvement relatif est aussi rectiligne et uniforme (*fig.* 72). — Dans ce cas, la trajectoire relative C est une ligne droite; la vitesse relative V_r

est constante en grandeur, direction et sens; la vitesse V_a du mouvement résultant, étant la somme géométrique de deux vecteurs invariables, est elle-même *constante en grandeur, direction et sens;* le mouvement résultant est donc *rectiligne et uniforme* (n° 49). La trajectoire résultante est une droite C_a qui passe par une quelconque des positions du mobile et qui coïncide en direction avec la vitesse V_a, somme géométrique de V_r et V_e (*fig.* 72).

Fig. 72.



Par exemple, si un bateau descend un fleuve en ligne droite, avec une vitesse constante V_e, et si une bille roule sur le pont du bateau de façon que son centre décrive sur le pont une droite d'un mouvement relatif uniforme de vitesse V_r, le mouvement résultant du centre de la bille est également rectiligne et uniforme, et sa vitesse V_a est la somme géométrique des vitesses V_r et V_e.

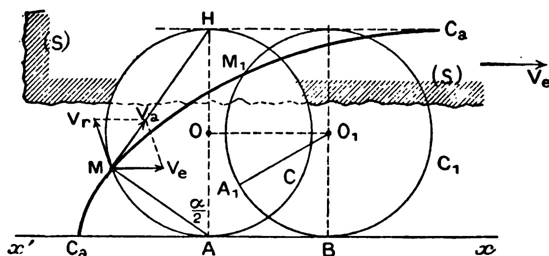
En général, la bille pourra rouler suivant une direction faisant un angle quelconque α avec la direction de la marche du bateau; alors V_a, diagonale du parallélogramme V_e V_r dont les côtés font l'angle α, est donnée par la formule (2).

Si la bille roule dans le sens même de la marche du bateau ($\alpha = 0$), la vitesse résultante du centre est dirigée dans le sens commun de V_r et V_e et égale à leur

somme ; si la bille roule en sens contraire de la marche du bateau ($\alpha = \pi$), la vitesse résultante est dirigée dans le sens de la plus grande des deux vitesses V_r et V_e et a une grandeur égale à la différence de ces vitesses. En particulier, le centre de la bille serait immobile par rapport aux rives si sa vitesse relative constante V_r était précisément égale et opposée à la vitesse de translation constante V_e du bateau.

2° Le mouvement relatif est un mouvement circulaire uniforme. — Prenons un cas particulier intéressant qu'on observe journellement. Imaginons une voiture roulant sur une route droite et supposons que la caisse (S) de cette voiture soit animée d'un mouvement de translation rectiligne et uniforme nécessairement parallèle à la trace $x'x$ d'une roue sur le sol (*fig.* 73). Considérons une roue de la voiture : elle

Fig. 73.



roule sur le sol, mais son mouvement relatif par rapport à la caisse (S) est un mouvement de rota-

tion autour de l'essieu O avec une certaine vitesse angulaire ω. Cherchons alors le mouvement d'un point M, marqué sur la circonférence C de la roue, par rapport au sol.

Nous pouvons dire que ce mouvement est le mouvement résultant du mouvement de translation du système (S) et du mouvement relatif circulaire uniforme du point M par rapport au système (S). La vitesse de translation de la caisse (S) est un vecteur constant V_e parallèle à $x'x$, la vitesse relative V_r est un vecteur tangent à la circonférence C dans le sens du mouvement et égal à ωR, R désignant le rayon de la roue. La vitesse V_a de M dans le mouvement résultant est la somme géométrique des deux vecteurs MV_e et MV_r. Mais actuellement, ces deux vecteurs sont *égaux* en grandeur. En effet, pendant le temps $t + \Delta t$. la voiture avance de telle façon que O vienne en O_1, la roue tourne de telle façon que M vienne en M_1 et que le point de la roue qui touchait le sol en A vienne en A_1, tandis qu'un autre point de la roue vient toucher le sol en B. La quantité $OO_1 = AB$ dont la voiture a avancé est précisément égale à l'arc de circonférence BA_1 par les points duquel la roue a successivement touché le sol : en appelant alors $\Delta\theta$ l'angle BO_1A_1 dont la roue a tourné par rapport à la voiture, on a

$$R\Delta\theta = OO_1,$$

d'où, en divisant par Δt et se rappelant que, les

mouvements étant uniformes, $\frac{\Delta\theta}{\Delta t}$ est la vitesse angulaire de la roue ω et $\frac{OO_1}{\Delta t}$ la vitesse de translation V_e de la voiture,

$$R\omega = V_e.$$

On voit donc, comme nous l'avons dit, que l'on a, en grandeur,

$$V_r = V_e.$$

La vitesse V_a du mouvement résultant est alors dirigée suivant la bissectrice de l'angle $V_e M V_r$: elle passe donc par le point H le plus haut de la roue à l'instant considéré, d'après les théorèmes élémentaires sur la mesure des angles.

Quand le point M arrive au point le plus haut de la roue, les deux vecteurs V_r et V_e ont le même sens, la vitesse résultante V_a du point est égale au double de la vitesse de la voiture; quand le point M arrive au point le plus bas de la roue, en contact avec le sol, les deux vecteurs ont des sens opposés et la vitesse résultante V_a du point M est *nulle*.

La trajectoire résultante C_a du point M est une courbe appelée *cycloïde,* représentée sur la figure 73. Comme V_a est tangent à cette courbe, on voit que la tangente à la cycloïde au point M passe par le point H de la circonférence roulante diamétralement opposé au point de contact A de la circonférence avec le sol.

Remarque. — En appelant α l'angle $V_r M V_e$, on a

ici, puisque le parallélogramme construit sur V_r et V_e est un losange,

$$V_a = 2 V_r \cos\frac{\alpha}{2} = 2 R\omega \cos\frac{\alpha}{2}.$$

Si l'on joint MA, l'angle HAM est égal à $\frac{\alpha}{2}$ et l'on a, dans le triangle rectangle HAM,

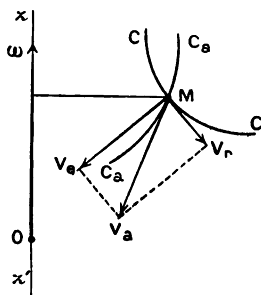
$$AM = 2 R \cos\frac{\alpha}{2}.$$

On peut donc dire que la vitesse résultante V_a du point M est perpendiculaire à AM, et égale au produit $\omega . AM$; elle est identique à celle qu'aurait le point M si la roue, à l'instant t, tournait, avec la vitesse angulaire ω, autour d'un axe perpendiculaire au plan de la roue et passant par le point de contact A. C'est là un moyen mnémonique de se rappeler la vitesse du point M; il ne faut rien y voir d'autre.

66. **Le mouvement d'entraînement est un mouvement de rotation uniforme autour d'un axe fixe.** — Comme la trajectoire relative C est invariablement liée au système de comparaison (S), si le mouvement de ce système est une rotation uniforme autour d'un axe fixe $z'z$ (*fig.* 74) dont la vitesse angulaire a pour valeur absolue la constante ω, la courbe C tourne autour de $z'z$ avec la vitesse donnée ω. En même temps le mobile M marche sur cette courbe. Il décrit dans le mouvement résultant une courbe C_a. Si nous

représentons la rotation par un vecteur $O\omega$ porté sur l'axe, la vitesse d'entraînement V_e de M est le moment linéaire de ce vecteur ω par rapport à M; la vitesse relative V_r est un vecteur connu tangent à C; la vitesse du mouvement résultant V_a est la somme géométrique de V_e et V_r; elle est tangente à C_a.

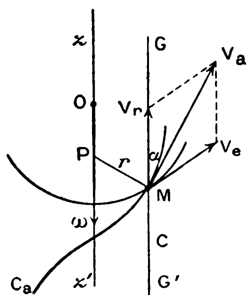
Fig. 74.



Examinons encore quelques cas particuliers :

1° **Le mouvement relatif est un mouvement rectiligne uniforme parallèle à l'axe de rotation.** — La trajectoire relative C est alors une droite GG' parallèle à l'axe $z'z$ (*fig.* 75) et la vitesse relative est un vecteur V_r constant dirigé suivant cette droite. Dans ce cas, la trajectoire résultante est une hélice circulaire parcourue avec une vitesse V_a constante. En effet, la droite C en tournant autour de $z'z$ engendre un cylindre de révolution dont le rayon r est la distance MP de la droite C à l'axe $z'z$; il est évident que le point M décrit une courbe C_a tracée sur ce cylindre.

Fig. 75.



La vitesse d'entraînement V_e est perpendiculaire au plan de M et de l'axe $z'z$ et égale à ωr; elle est donc de grandeur constante. La vitesse du mouvement résultant V_a est la diagonale du rectangle $V_r M V_e$ dont les côtés sont constants en grandeur; elle est donc *constante* en grandeur et fait avec la droite C, c'est-à-dire avec les génératrices du cylindre engendré par C, un angle *constant* α défini par

$$\tang \alpha = \frac{V_e}{V_r} = \frac{\omega r}{V_r}.$$

La courbe C_a décrite dans le mouvement résultant est donc une courbe tracée sur un cylindre de révolution et coupant les génératrices sous un angle *constant* α. Cette courbe est une hélice (n° 62) dont le pas h est donné par

$$\frac{2\pi r}{h} = \frac{\omega r}{V_r},$$

$$h = \frac{2\pi V_r}{\omega};$$

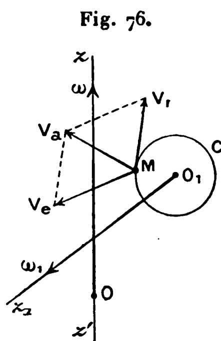
c'est la longueur dont le point M a avancé sur la droite C, quand cette droite a fait un tour.

On retrouve ainsi, sous une autre forme, le résultat que nous avons obtenu (n° 62) quand nous avons regardé la vitesse d'un point M sur une hélice comme la somme de deux vitesses V_2 et V_1 dirigées respectivement suivant la génératrice et la tangente au parallèle du point.

On peut se représenter le mouvement que nous venons d'étudier en imaginant qu'on ouvre une porte avec une vitesse angulaire constante ω, et qu'en même temps un insecte M avance sur la porte en décrivant une droite parallèle à l'axe de rotation avec une vitesse relative constante. Dans le mouvement résultant, l'insecte décrit une hélice d'un mouvement uniforme.

2° **Le mouvement relatif est un mouvement circulaire uniforme.** — Supposons que la trajectoire relative C soit un cercle de rayon r_1 parcouru avec une vitesse angulaire constante ω_1, le mouvement d'entraînement étant toujours une rotation uniforme représentée par le vecteur $O\omega$ (*fig.* 76). On peut dire que le mouvement relatif est aussi une rotation du point M autour d'un axe $O_1 z_1$ mené perpendiculairement au plan du cercle C par son centre O_1. Cette rotation est représentée par un vecteur $O_1 \omega_1$, dirigé suivant cet axe dans un sens convenable. Dès lors la vitesse d'entraînement V_e, de M, est le moment linéaire du vecteur $O\omega$ par rapport à M; la vitesse relative V_r est de même le moment linéaire du vecteur $O_1\omega_1$ par rapport au point M. Donc la vitesse V_a du mouve-

Fig. 76.



ment résultant est la somme géométrique de ces deux moments linéaires, c'est-à-dire le moment résultant par rapport à M des deux vecteurs $O\omega$ et $O_1\omega_1$ dans la position qu'ils occupent à l'instant t. On peut encore se représenter ce mouvement en imaginant une porte qu'on ouvre avec une vitesse angulaire constante ω et un insecte qui décrit avec une vitesse angulaire constante ω_1 un cercle C tracé sur la porte.

Si les deux vecteurs $O\omega$ et $O_1\omega_1$ étaient concourants, on pourrait construire leur somme géométrique Ω; la vitesse V_a du point M serait alors le moment linéaire de Ω par rapport à M. Ce cas particulier se présenterait si la perpendiculaire élevée au plan du cercle, par son centre, rencontrait l'axe de rotation de la porte.

EXERCICES.

CHAPITRE I.

1. On considère les trois vecteurs AB, BC, CA, formés par les côtés d'un triangle ABC parcourus dans un même sens de circulation; déterminer la somme géométrique de ces vecteurs et leur moment résultant par rapport à un point O.

Réponse :

La somme géométrique est nulle; le moment résultant est le même pour tous les points de l'espace; il est perpendiculaire au plan du triangle et égal au double de l'aire du triangle.

2. Même question pour le système de vecteurs constitué par les côtés d'un polygone plan fermé, parcourus dans un même sens de circulation.

3. Même question pour le système de vecteurs constitué par les côtés d'un polygone gauche fermé, parcourus dans un même sens de circulation.

4. Soient OG_1 le moment linéaire d'un vecteur P_1 par

rapport à un point O, $O'G'_1$ son moment linéaire par rapport à un second point O'. Démontrer que $O'G'_1$ est la somme géométrique d'un vecteur $O'H_1$ égal et parallèle à OG_1 et du moment linéaire, par rapport à O', du vecteur OQ_1 d'origine O égal et parallèle à P_1.

5. Soient OR et OG la somme géométrique et le moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point O, O'R' et O'G' la somme géométrique et le moment résultant du même système par rapport à un second point O'. Démontrer :

1° Que O'R' est égal et parallèle à OR;

2° Que O'G' est la somme géométrique d'un vecteur O'H égal et parallèle à OG et du moment linéaire, par rapport à O', du vecteur OR.

Réponse :

Il suffit d'appliquer à chacun des vecteurs du système le résultat de l'exercice 4.

6. Soient O'R' et O'G' la somme géométrique et le moment résultant d'un système de vecteurs par rapport à un point quelconque O' de l'espace. Quand ce point O' varie, le vecteur O'R' reste constant en grandeur, direction, sens, mais O'G' varie.

Démontrer que la projection de O'G' sur O'R' est invariable.

(On s'appuiera sur le résultat de l'exercice précédent.)

7. Étant donné un système de vecteurs, on choisit un point quelconque A dans l'espace. Trouver le lieu géométrique des axes AB passant par A et tels que la somme des moments des vecteurs du système par rapport à chacun de ces axes soit nulle.

Réponse :

Pour qu'un axe AB réponde à la question, il faut et il suffit que cet axe soit perpendiculaire au moment résultant AG, du système de vecteurs donné, par rapport à A. Le lieu est le plan perpendiculaire à AG au point A.

CHAPITRE II.

1. Un train marchant d'un mouvement uniforme part de Paris à midi 30^m et arrive à Epernay à $2^h 17^m$; la distance parcourue est de 142^{km}. Quelle est la vitesse du train :

1° En kilomètres à l'heure;

2° En mètres à la seconde?

2. Quand un point pesant est lancé dans le vide, suivant une verticale Ox, la loi du mouvement est, en prenant comme sens positif le sens de haut en bas,

$$x = x_0 + v_0 t + \frac{1}{2} g t^2,$$

où $g = 980$ quand l'unité de longueur est le centimètre et l'unité de temps la seconde.

Trouver la vitesse au temps t.

Réponse :

$$v = v_0 + gt.$$

3. Calculer le temps que mettrait un point pesant à tomber de la tour Eiffel (300^m) en négligeant la résistance de l'air; calculer la vitesse avec laquelle il toucherait le sol.

Réponse :

En prenant pour unité de longueur le mètre et pour unité

de temps la seconde on a

$$T = \sqrt{\frac{2.300}{9,808}},$$

soit, à peu près, 8 secondes; puis

$$V = \sqrt{2.300.9,808},$$

soit, à peu près, 78^{m} à la seconde.

4. Deux points m et m' se meuvent sur deux droites parallèles D et D' avec des mouvements uniformément accélérés d'accélérations respectives γ et γ'. Quel est le mouvement du point M milieu de la droite mm'?

Réponse :

Ce point décrit une parallèle aux deux droites d'un mouvement uniformément accéléré d'accélération $\frac{1}{2}(\gamma + \gamma')$.

5. On considère une montre dont la grande aiguille a 2^{cm} de longueur; étudier le mouvement de la projection de l'extrémité de l'aiguille sur le diamètre de la montre allant du point XII au point VI (le mouvement de l'extrémité de l'aiguille est supposé uniforme).

Prenons, sur le diamètre XII-VI, le centre O comme origine et le sens O-XII comme positif : comptons le temps t à partir de midi en secondes et les longueurs en centimètres; l'abscisse de la projection de l'extrémité de la grande aiguille, à l'instant t, sera

$$x = 2 \cos \frac{2\pi t}{3600} = 2 \cos \frac{\pi t}{1800}.$$

Le mouvement rectiligne qu'il s'agit d'étudier est donc un mouvement vibratoire simple sur une droite (n° 54).

6. En prenant comme unité de longueur le centimètre et comme unité de temps la seconde, calculer les accélérations des extrémités de la petite et de la grande aiguille d'une montre, sachant que les longueurs de ces aiguilles sont 1^{cm} et $1^{cm},5$.

7. La Terre étant regardée comme un solide qui tourne uniformément autour d'un axe fixe (ligne des pôles) en 24 heures moyennes moins 4 minutes, calculer la vitesse et l'accélération :

1° D'un point de l'équateur ;

2° D'un point pris à Paris ;

en prenant comme unité de longueur le kilomètre et comme unité de temps la seconde.

On regardera la Terre comme une sphère dont un grand cercle a 40000^{km} de circonférence ; la latitude de Paris est $48°50'$.

8. Un mobile parcourt, avec une vitesse constante v, une trajectoire composée d'une portion rectiligne et d'un arc de cercle de rayon R qui se raccordent en un point A. Quelle est la variation que subit l'accélération au moment où le mobile franchit le point de raccordement A ?

9. Un train animé d'une vitesse constante de 80^{km} à l'heure décrit un arc de cercle dont le rayon est de 500^{m}. Quelle est l'accélération d'un point du train, si l'on prend comme unité de temps la seconde et comme unité de longueur le mètre?

10. Une voiture est animée d'un mouvement de translation horizontal rectiligne et uniforme de vitesse $V = 3^{m}$ à la seconde ; la pluie tombe verticalement et les gouttes ont une vitesse constante $v = 4^{m}$ à la seconde.

Quel est le mouvement d'une goutte de pluie par rapport à la voiture ?

Réponse :

Un mouvement rectiligne uniforme dont la vitesse W est la différence géométrique des vecteurs v et V. La grandeur de W est donc $\sqrt{9+16} = 5^{\text{m}}$ à la seconde, et l'angle α de W avec la verticale est donné par $\tang \alpha = \frac{3}{4}$.

11. La grande aiguille d'une montre a 3^{cm} de long. On imprime à la montre un mouvement de translation rectiligne et uniforme dont la vitesse est perpendiculaire au plan du cadran et égale à $0^{\text{mm}},05$ par seconde.

Quelle est la courbe décrite par l'extrémité de la grande aiguille; quelle est la vitesse de cette extrémité?

Réponse :

La vitesse d'entraînement de l'extrémité de l'aiguille est, en millimètres à la seconde, un vecteur v_e normal au cadran

$$v_e = 0,05;$$

sa vitesse relative par rapport au cadran est un vecteur v_r dans le plan du cadran

$$v_r = \frac{60\pi}{60^2} = \frac{\pi}{60} = 0,052.$$

La vitesse résultante est

$$v = \sqrt{v_e^2 + v_r^2} = 0,07.$$

La trajectoire est une hélice dont on calculera le pas.

12. Un insecte marche le long de la grande aiguille d'une montre avec une vitesse de $0^{mm},1$ à la seconde : il part du centre à midi. Quelle est, en grandeur et direction, sa vitesse v à l'instant t?

Réponse :

Prenons comme unité de longueur le millimètre et comme unité de temps la seconde. A l'instant t, l'insecte est à une distance

$$r = 0,1\,t$$

du centre. La vitesse relative par rapport à l'aiguille est

$$v_r = 0,1;$$

sa vitesse d'entraînement v_e est perpendiculaire à l'aiguille et a pour valeur

$$v_e = \frac{2\pi}{60^2} \cdot 0,1\,t.$$

La vitesse résultante v est $\sqrt{v_r^2 + v_e^2}$; elle fait avec la perpendiculaire à l'aiguille un angle α tel que

$$\operatorname{tang}\alpha = \frac{v_r}{v_e} = \frac{60^2}{2\pi t}.$$

Par exemple, au bout de 5 minutes,

$$t = 5 \times 60, \qquad \operatorname{tang}\alpha = \frac{6}{\pi} = 1,91.$$

13. *Composition de deux mouvements rectilignes de même direction.* — Une droite matérielle O_1x_1, d'extrémité O_1, glisse sur une droite fixe Ox suivant une loi donnée : en même temps, un mobile M se meut sur O_1x_1, sui-

vant une loi donnée, par rapport à O_1x_1. Trouver le mouvement du point M par rapport à Ox.

Réponse :

Appelons x_1 l'abscisse du point O_1 par rapport à l'axe fixe Ox; le point O_1 étant lié à la droite O_1x_1 la loi de son mouvement

$$x_1 = f_1(t)$$

est celle du mouvement de translation de la droite O_1x_1.

Appelons x_2 l'abscisse de M sur O_1x_1; la loi du mouvement de M sur O_1x_1 étant donnée, on a

$$x_2 = f_2(t).$$

L'abscisse x du point M par rapport à Ox est alors

$$(1) \qquad x = x_1 + x_2.$$

Cette équation définit le mouvement résultant de M par rapport à Ox.

La vitesse résultante v de M est la somme algébrique des vitesses v_1 et v_2 des deux mouvements rectilignes; l'accélération γ de M est la somme des accélérations γ_1 et γ_2 des deux mouvements.

La relation (1) donne, en effet, par dérivation

$$\frac{dx}{dt} = \frac{dx_1}{dt} + \frac{dx_2}{dt},$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d^2x_1}{dt^2} + \frac{d^2x_2}{dt^2}.$$

Exemples :

Composition de deux mouvements vibratoires parallèles et de même période. — Supposons que les deux mouve-

ments rectilignes parallèles considérés soient deux mouvements vibratoires parallèles caractérisés par une même période T, mais présentant une différence de phase; les équations de ces mouvements seront, par exemple, de la forme

$$x_1 = a_1 \sin \frac{2\pi t}{T},$$
$$x_2 = a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right);$$

l'élongation x du mouvement résultant est

$$x = x_1 + x_2 = a_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + a_2 \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \alpha\right)$$

ou, en développant,

$$(2) \qquad x = a_1 \sin \frac{2\pi t}{T} + a_2 \sin \frac{2\pi t}{T} \cos\alpha + a_2 \cos \frac{2\pi t}{T} \sin\alpha.$$

Démontrer que ce mouvement est un mouvement vibratoire de même période.

Réponse :

Cherchons à mettre l'équation (2) sous la forme

$$(3) \qquad x = A \sin\left(\frac{2\pi t}{T} + \delta\right).$$

Nous trouvons

$$A \cos\delta = a_1 + a_2 \cos\alpha,$$
$$A \sin\delta = a_2 \sin\alpha;$$

en ajoutant membre à membre, après avoir élevé au carré, on a

$$(4) \qquad A^2 = a_1^2 + a_2^2 + 2a_1 a_2 \cos\alpha$$

et en divisant membre à membre

$$(5) \qquad \operatorname{tang}\delta = \frac{a_2 \sin\alpha}{a_1 + a_2 \cos\alpha};$$

la première de ces équations fait connaître l'amplitude du mouvement vibratoire résultant, la seconde donne la quantité δ qui définit sa phase.

La valeur de A est toujours réelle, car le minimum de $\cos\alpha$ est -1 et dans ce cas l'expression de A est le carré de $(a_1 - a_2)$; l'équation (5), de même, donne toujours une valeur réelle pour δ.

Si $\cos\alpha = 1$, on a

$$A = a_1 + a_2;$$

les amplitudes s'ajoutent; si, au contraire, $\cos\alpha = -1$, on voit que

$$A = a_1 - a_2,$$

et si les amplitudes des deux mouvements superposés sont égales, A devient nul, l'amplitude du mouvement vibratoire s'annule; il y a extinction du mouvement vibratoire, phénomène auquel on donne le nom d'*interférence*.

Mouvement périodiquement uniforme. — *Composer un mouvement vibratoire simple avec un mouvement rectiligne uniforme sur la droite sur laquelle s'exécute la vibration.*

Réponse :

Soit

$$x_1 = x_0 + v_0 t$$

l'équation du mouvement uniforme, où v_0 est une constante,

et soit

$$x_2 = a \sin(\omega t + \delta)$$

l'équation du mouvement vibratoire.

L'équation du mouvement résultant sera, d'après les théorèmes précédents,

$$(1) \qquad x = x_1 + x_2 = x_0 + v_0 t + a \sin(\omega t + \delta);$$

la vitesse sera donnée par la formule

$$(2) \qquad v = \frac{dx}{dt} = v_0 + a\omega \cos(\omega t + \delta)$$

et l'accélération sera

$$(3) \qquad \gamma = \frac{dv}{dt} = -a\omega^2 \sin(\omega t + \delta).$$

14. Imaginons, dans un plan xOy, une droite OR faisant avec Ox un angle θ variable avec t; pendant que cette droite tourne, un point M glisse sur cette droite de telle façon que sa distance $r = \mathrm{OM}$ soit une fonction donnée de t. Calculer la vitesse absolue du point M.

Réponse :

La vitesse d'entraînement est perpendiculaire à OM et égale à

$$V_P = r\frac{d\theta}{dt};$$

la vitesse relative est dirigée suivant MR et a pour valeur algébrique

$$V_R = \frac{dr}{dt}.$$

La vitesse V du mobile est la somme géométrique des deux.

15. On considère le mouvement hélicoïdal uniforme d'un point comme résultant du mouvement de translation uniforme d'un cercle C perpendiculairement à son plan et du mouvement *circulaire uniforme d'un point* M sur ce cercle; mouvement étudié dans le texte.

On demande d'étudier la projection du mouvement du point M sur un plan fixe Q parallèle au plan du cercle C, la projection se faisant parallèlement à une direction fixe D oblique au plan Q. Examiner le cas particulier où la direction D des projetantes est parallèle à une tangente à l'hélice H lieu du point M.

Réponse :

Appelons β l'angle de la direction des projetantes avec la droite $z'z$ décrite par le centre du cercle C dans l'espace et G la vitesse de ce centre; ω la vitesse angulaire du point M sur le cercle C de rayon R.

La projection du cercle C sur le plan Q est un cercle égal c dont le centre décrit une droite avec une vitesse

$$g = G \operatorname{tang} \beta.$$

La projection de M est un point m qui décrit le cercle c avec la même vitesse angulaire ω.

Le mouvement demandé de m est donc le mouvement résultant du mouvement de translation rectiligne uniforme d'un cercle dans son plan, et du mouvement uniforme d'un point m sur ce cercle : la vitesse de translation étant g et la vitesse relative due à la rotation, ωR.

Si les projetantes sont parallèles à une tangente à l'hélice, β est égal à l'angle α sous lequel l'hélice coupe les généra-

trices du cylindre qui la porte; on a

$$\tang\beta = \tang\alpha = \frac{R\omega}{G},$$

et, par suite,

$$g = R\omega.$$


Le point m décrit alors une cycloïde.

16. On ouvre une porte plane avec une vitesse angulaire constante; un insecte M monte sur la porte, parallèlement à l'axe de rotation, avec une vitesse constante; quelle est la courbe qu'il décrit dans l'espace? Quelle est sa vitesse résultante?

Réponse :

Hélice; vitesse constante.

17. On ouvre une porte plane avec une vitesse angulaire constante; un insecte M monte sur la porte, avec une vitesse constante, suivant une droite qui rencontre l'axe de rotation. Étudier son mouvement résultant. Calculer sa vitesse.

18. Considérons la Terre comme un solide qui tourne autour d'un axe fixe PP′ en 24 heures moins 4 minutes. Un train décrit un parallèle terrestre avec une vitesse constante V, par rapport à la Terre.

Quelle est la vitesse résultante du train?

On envisagera successivement les deux hypothèses du train allant de l'est à l'ouest, ou de l'ouest à l'est.

La vitesse résultante pourrait-elle être nulle?

En supposant que le train ait une vitesse de 100^{km} à l'heure, quel parallèle devrait-il décrire pour que sa vitesse résultante soit nulle?

19. *Exemple de composition de rotations parallèles.* — Un plateau horizontal tourne, avec une vitesse angulaire constante ω, autour d'un axe vertical fixe Oz; sur ce plateau est posée à plat une montre dont le centre est en O', de telle façon que, par rapport au plateau, la grande aiguille tourne autour de la verticale $O'z'$ liée au plateau, avec une vitesse angulaire

$$\omega' = \frac{2\pi}{60^2}.$$

Soient $O\omega$ et $O'\omega'$ les vecteurs représentatifs de ces rotations, déterminer la vitesse résultante d'un point quelconque M de la grande aiguille.

Réponse :

Cette vitesse est à chaque instant le moment résultant des deux vecteurs $O\omega$ et $O'\omega'$ par rapport au point M. Si les deux rotations $O\omega$ et $O'\omega'$ sont égales et de sens contraires, l'aiguille est animée d'un mouvement de translation circulaire.

20. Même question en supposant la montre fixée sur le plateau dans une position quelconque. (Les rotations ne sont plus parallèles; la vitesse résultante de M est toujours le moment résultant, par rapport à M, des deux vecteurs représentant les rotations.)

FIN.

TABLE DES MATIÈRES.

CHAPITRE PREMIER.

NOTIONS GÉOMÉTRIQUES; VECTEURS; PROJECTIONS; MOMENTS.

I. — Segments sur un axe ou une ligne orientés.

II. — Vecteurs; projections et moments.

CHAPITRE II.

CINÉMATIQUE.

I. — Mouvement ; temps.

II. — Cinématique du point.

III. — Mouvements élémentaires d'un système invariable ou corps solide.

IV. — Changement du système de comparaison.

FIN DE LA TABLE DES MATIÈRES.

36803. PARIS. — IMPRIMERIE GAUTHIER-VILLARS.
55, QUAI DES GRANDS-AUGUSTINS.

